Kapitel 1

Zeitfunktionen

Systeme werden durch Eingangsgrößen (Ursache, Eingangssignal, Erregung) angeregt und man interessiert sich für die Ausgangsgrößen (Wirkung, Ausgangssignal, Antwort). Die praktisch vorkommenden Signale lassen sich im Allgemeinen nicht als Zeitfunktionen explizit angeben, da sie unregelmäßiger Natur sind (Sprache, Musik, Meßwerte, ...). Außerdem wäre es unmöglich, das Verhalten von Systemen für alle praktisch vorkommenden Eingangssignale zu untersuchen. Daher verwendet man bei der Untersuchung von Netzwerken einfache »Testsignale«, die man so auswählt, dass sie sich gut mathematisch darstellen lassen und dass sich die Antwort des Systems auf das Testsignal einfach berechnen lässt. Diese Testsignale werden außerdem so gewählt, dass sich die tatsächlichen Signale aus den Testsignalen zusammensetzen lassen. Bei linearen Systemen kann man das Eingangssignal in Testsignale zerlegen und die Systemantwort durch Überlagerung der Antworten auf die Testsignale berechnen. Damit sind die Systemantworten der Testsignale auch für praktisch vorkommende Signale anwendbar.

1.1 Elementarfunktionen

Eine wichtige Gruppe von Testsignalen sind die Elementarfunktionen. Ist die Antwort eines linearen Systems auf eine Elementarfunktion bekannt, so sind alle Eigenschaften dieses Netzwerks im Prinzip beschrieben.

Die beiden wichtigsten Elementarfunktionen sind sind die Sprung- und die Impulsfunktion. Die Sprungfunktion δ_{-1} ist folgendermaßen definiert

$$\delta_{-1}(t) = \begin{cases} 0 & \text{für } t < 0 \\ 1 & \text{für } t \geqslant 0 \end{cases} \tag{1.1}$$

Abbildung 1.1 zeigt den Verlauf der Sprungfunktion.

Eine weitere wichtige Elementarfunktion ist der Dirac-Impuls oder kurz Impuls, auch Stoß-, Impuls- oder Deltafunktion genannt. Die Impulsfunktion ist folgendermaßen definiert

$$\begin{aligned} \delta_0(t) &= 0 \quad \text{für } t \neq 0 \qquad (1.2) \\ \int_{-\infty}^{\infty} \delta_0(t)dt &= 1 \end{aligned}$$

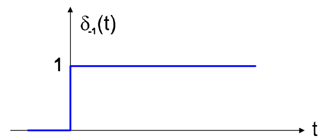

Abbildung 1.1: Sprungfunktion $\delta_{-1}(t)$

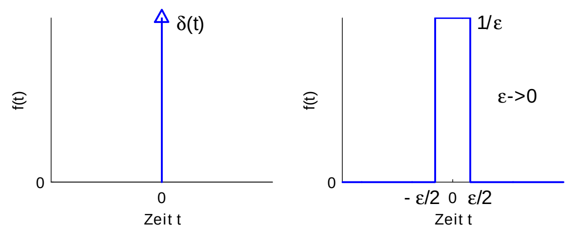

Abbildung 1.2: Darstellung des Einheitsimpulses

Beachten Sie, das bei der Δ-Funktion lediglich das Integral – die Fläche des Signals – definiert ist. Daher kann man kann den Einheitsimpuls, wie in Abbildung 1.2 gezeigt, darstellen. Die Breite des Impulses geht gegen Null, die Fläche des Impulses ist 1, die Amplitude geht daher gegen ∞.

Es können auch andere Kurvenformen (z.B. Dreieckspuls) zur Darstellung des Dirac-Impulses verwendet werden: *Die Kurvenform ist nicht festgelegt*, sondern lediglich die Tatsache, dass die Impulsdauer gegen Null geht und die Fläche 1 ist !

Anmerkung 1 *Die Impulsfunktion ist keine echte Funktion und beschreibt keine eindeutige Funktion. Sie ist überall Null, mit Ausnahme der Stelle Null und auch an diesem Punkt ist sie nicht definiert. Die Bedeutung der Impulsfunktion liegt in ihrer Wirkung auf andere Funktionen, es wird nichts ausgesagt was die Impulsfunktion ist oder wie sie aussieht. Es wird lediglich die Wirkung der Impulsfunktion auf eine andere Funktion - die Signalfunktion $s(t)$ - untersucht.*

Allgemein sind die Elementarfunktionen durch folgende Beziehung definiert

$$\delta_i(t) = \int_{-\infty}^{t} \delta_{i+1}(\tau) d\tau \tag{1.3}$$

Der Zusammenhang zwischen der Sprung- und der Deltafunktion ist daher

$$\delta_{-1}(t) = \int_{-\infty}^{t} \delta_0(\tau) dt = \begin{cases} 0 & \text{für } t < 0 \\ 1 & \text{für } t \geqslant 0 \end{cases} \tag{1.4}$$

Die Sprungfunktion ist das Integral der Impulsfunktion. Umgekehrt müsste daher gelten

$$\delta_0(t) = \frac{d}{dt}\delta_{-1}(t) \tag{1.5}$$

Wie man sieht, ist $\delta_{-1}(t)$ an der Stelle $t = 0$ nicht differenzierbar, man kann diese Beziehung daher nur formal gelten lassen. Der Impuls und seine Ableitungen sind im Rahmen der Distributionentheorie exakt definierbar. Für unsere Zwecke – es geht lediglich um die Wirkung der Impulsfunktion (und der Sprungfunktion) auf andere Funktionen – ist die Definition des Impulses ausreichend und wir verwenden auch die Bezeichnung Funktion.

Weitere Elementarfunktionen sind $\delta_1(t)$, der Doppelimpuls an der Stelle $t = 0$, die Rampenfunktion $\delta_{-2}(t)$, eine für $t \geq 0$ linear ansteigende Funktion oder $\delta_{-3}(t)$, eine Parabel für $t \geq 0$. Diese Elementarfunktionen haben aber keine Bedeutung für die Netzwerktheorie.

Wie erwähnt, interessiert uns lediglich die Wirkung der Impulsfunktion (und Sprungfunktion) auf andere Zeitfunktionen und hier vor allem die Faltung der Elementarfunktion mit anderen Zeitfunktionen. Die Faltung zweier Funktionen ist folgendermaßen definiert

$$g_1(t) * g_2(t) = \int_{-\infty}^{\infty} g_1(\tau) g_2(t-\tau) d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} g_1(t-\tau) g_2(\tau) d\tau \tag{1.6}$$

Abbildung 1.3 veranschaulicht den Faltungsvorgang.

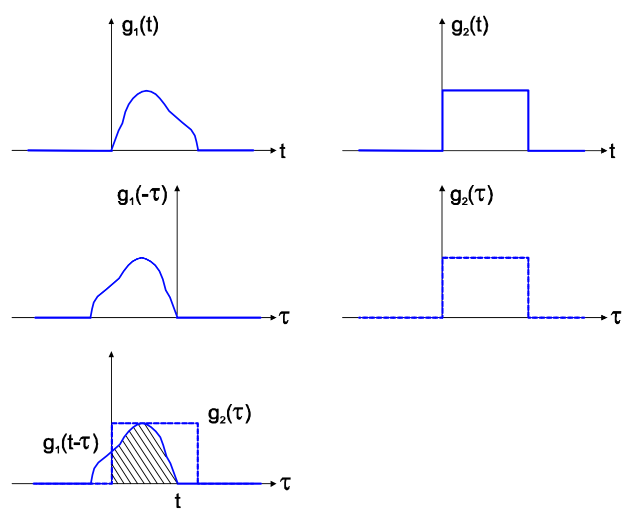

Abbildung 1.3: Veranschaulichung des Faltungsintegrals

1. Die zu faltenden Zeitfunktionen $g_1(t)$ und $g_2(t)$ werden als Funktionen von τ dargestellt.

2. t ist die unabhängige Variable im Faltungsintegral, daher muss für die Zeitfunktionen $g_1(t)$ und $g_2(t)$ die neue Variable τ eingeführt werden.

3. Wir stellen die Funktionen zuerst für $t = 0$ dar und erhalten $g_1(-\tau)$ und $g_2(\tau)$. Die Funktion $g_1(-\tau)$ ist die entlang der vertikalen Achse gespiegelte (gefaltete) Funktion $g_1(\tau)$, daher der Name für diese Operation.

4. t nimmt die Werte von $-\infty$ bis ∞ an, was nichts anderes bedeutet, dass die Funktion $g_1(-\tau)$ entlang der $\tau-$Achse verschoben wird $\rightarrow g_1(t-\tau)$. Zu jedem Zeitpunkt t wird das Produkt $g_1(t-\tau)g_2(\tau)$ gebildet, das Integral dieses Produkts von $-\infty$ bis ∞ liefert den Wert der Faltung zum Zeitpunkt t.

Da wir nur Zeitfunktionen betrachten, die für $t < 0$ Null sind, kann das Integrationsintervall von 0^- bis t^+ erstreckt werden. Faltet man eine Elementarfunktion $\delta_i(t)$ mit einer Zeitfunktion $g(t)$, die für $t \geq 0$ existiert, so erhalten wir

$$g(t) * \delta_i(t) = \int_{0^-}^{t^+} g(\tau)\delta_i(t-\tau)d\tau = \int_{0^-}^{t^+} g(t-\tau)\delta_i(\tau)d\tau = g^i(t) \tag{1.7}$$

Das Ergebnis ist der $i-$te Differentialquotient der Zeitfunktion $g(t)$. Im Speziellen wird also

$$\text{Impuls:} \qquad i = 0 \qquad g(t) * \delta_0(t) = g(t) \tag{1.8}$$

$$\text{Sprung:} \qquad i = -1 \qquad g(t) * \delta_{-1}(t) = \int_{0^-}^{t^+} g(\tau)d\tau \tag{1.9}$$

Die Impulsfunktion $\delta_0(t)$ hat die Eigenschaft einer Abtastfunktion, da die Faltung den Funktionswert an der Stelle t liefert, also der Zeitfunktion $g(t)$ an der Stelle t eine Probe entnimmt. $\delta_{-1}(t)$ legt die obere Integrationsgrenze fest, da die Faltung das Integral von $g(t)$ im Intervall 0^- bis t^+ ergibt. Damit haben wir die Möglichkeit, beliebige Zeitfunktionen aus Sprung oder Impuls (oder anderen Elementarfunktionen) zusammenzusetzen. Für Impuls und Sprung folgt

$$\text{Impuls: } g(t) = g(t) * \delta_0(t) = \int_{0^-}^{t^+} g(\tau)\delta_0(t-\tau)d\tau \tag{1.10}$$

$$\text{Sprung: } g(t) = \dot{g}(t) * \delta_{-1}(t) = \int_{0^-}^{t^+} \dot{g}(\tau)\delta_{-1}(t-\tau)d\tau \tag{1.11}$$

Der Punkt bedeutet die Ableitung nach der Zeit, $\dot{g}(t) = \frac{d}{dt}g(t)$

Gleichung (1.10) bedeutet die Zusammensetzung der Zeitfunktion $g(t)$ aus lauter Impulsen, die mit dem Gewicht $g(t)$ auftreten, während Gleichung (1.11) die Zusammensetzung der Zeitfunktion $g(t)$ aus lauter Sprüngen, die mit dem Gewicht $\dot{g}(t)$ auftreten, bedeutet.

1.2 Sinusfunktion

Eine weitere wichtige Aufbaufunktion ist die Sinusfunktion, da sich Signale aus Sinusschwingungen zusammensetzen und mathematisch darstellenlassen. Da wir Signale untersuchen wollen und mit ihnen rechnen müssen, fassen wir die Eigenschaften und den Umgang mit sinusförmigen Schwingungen zusammenfassen.

$$s(t) = A\sin(\omega_0 t + \varphi) \tag{1.12}$$

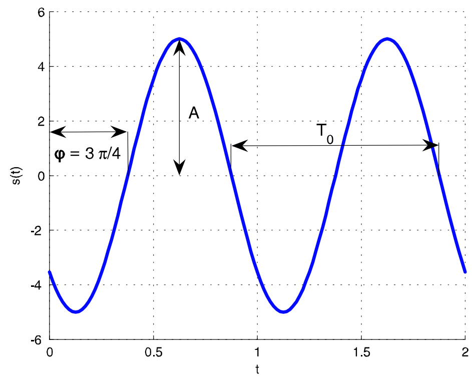

Abbildung 1.4: $s(t) = A\sin(\frac{2\pi}{T_0}t - \frac{3\pi}{4})$

$$\omega_0 = 2\pi f = 2\pi \frac{1}{T_0}$$

A ist die Amplitude, ω_0 die Kreisfrequenz und φ die Phase der Schwingung. Abbildung 1.4 zeigt die graphische Darstellung einer Sinusfunktion.

Sinus- und Kosinus-Funktion sind verwandt, ob man die Darstellung als Sinus oder Kosinus wählt, hängt von praktischen Überlegungen ab[1]. Es gelten folgende Eigenschaften

$$\begin{aligned}
\text{äquivalent} \quad \sin\varphi &= \cos(\varphi - \pi/2),\ \cos\varphi = \sin(\varphi + \pi/2) && (1.13)\\
\text{gerade} \quad \cos\varphi &= \cos(-\varphi) && (1.14)\\
\text{ungerade} \quad \sin\varphi &= -\sin(-\varphi) && (1.15)\\
\text{periodisch} \quad \cos\varphi &= \cos(\varphi + 2\pi k),\ k...ganzzahlig && (1.16)\\
\text{Ableitung} \quad \frac{d}{d\varphi}\sin\varphi &= \cos\varphi,\ \ \frac{d}{d\varphi}\cos\varphi = -\sin\varphi && (1.17)
\end{aligned}$$

Weitere Zusammenhänge zwischen Sinus und Kosinus

$$\begin{aligned}
\sin^2\varphi + \cos^2\varphi &= 1 && (1.18)\\
\sin 2\varphi &= 2\sin\varphi\cos\varphi && (1.19)\\
\cos 2\varphi &= \cos^2\varphi - \sin^2\varphi && (1.20)\\
\sin(\alpha \pm \beta) &= \sin\alpha\cos\beta \pm \cos\alpha\sin\beta && (1.21)\\
\cos(a \pm \beta) &= \cos\alpha\cos b \mp \sin\alpha\sin\beta && (1.22)
\end{aligned}$$

Bei der Darstellung von sinusförmigen Schwingungen sind zwei Schreibweisen gebräuchlich

[1] In der Elektrotechnik und Signalverarbeitung wählt man meistens die Darstellung in Form des Kosinus, da sich damit auch der Gleichanteil, als Komponente der Frequenz Null $\omega = 0$, darstellen lässt, $A\cos(\omega t)|_{\omega=0} = A$.

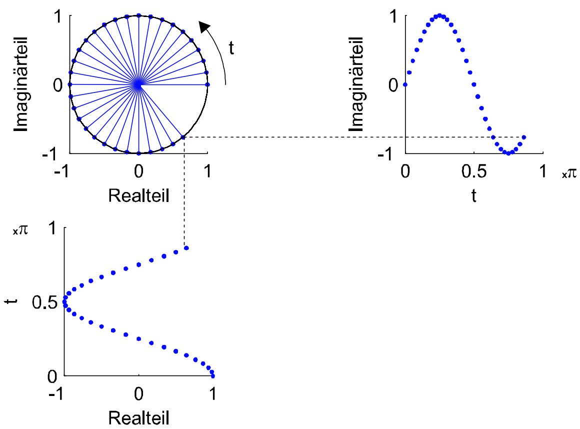

Abbildung 1.5: Komplexe Darstellung

$$s(t) = A\sin(\omega_0 t + \varphi) = A\sin(2\pi f_0 t + \varphi) \tag{1.23}$$

Die Darstellung unter Verwendung der Kreisfrequenz – $\sin(\omega_o t)$ – ist weniger anschaulich als die Darstellung mit der natürlichen Frequenz – $\sin(2\pi f_0 t)$. Das Beispiel $\sin(12.57t) = \sin(2\pi 2t)$ macht das deutlich: Frequenz $f = 2Hz$ ist anschaulicher als Kreisfrequenz $\omega = 12.57s^{-1}$.

Im weiteren Verlauf werden wir häufig mit Sinus- und Kosinus-Schwingungen rechnen müssen. Da das Rechnen mit Sinus und Kosinus in reeller Darstellung aufwändig ist, setzen wir häufig die komplexe Darstellung ein, die das Rechnen wesentlich erleichtert. In der Folge werden wir sowohl die reelle als auch die komplexe Darstellung verwenden.[2]

Über die Euler'sche Beziehung erhalten wir den Zusammenhang:

$$\vec{s}(t) = Ae^{j(\omega_o t+\varphi)} = A\cos(\omega_o t + \varphi) + jA\sin(\omega_o t + \varphi) \tag{1.24}$$

Die komplexe Form (1.24) liefert eine Darstellung von Sinus *und* Kosinus, das reellwertige Signal wird durch Realteilbildung ermittelt.

$$s(t) = \mathrm{Re}\{Ae^{j(\omega_o t+\varphi)}\} = A\cos(\omega_o t + \varphi) \tag{1.25}$$

Die Erzeugung von Sinus und Kosinus kann man sich als Projektion eines rotierenden Zeigers vorstellen, wie in Abbildung 1.5 dargestellt. Der Kosinus wird durch Projektion auf die horizontale (reelle) Achse, der Sinus durch Projektion auf die vertikale (imaginäre) Achse erzeugt. Der Zeiger dreht sich mit der Winkelgeschwindigkeit ω_0, die Position des Zeigers (der Winkel) zum Zeitpunkt t errechnet sich aus $\omega_0 t$. Hat der Zeiger eine Winkelgeschwindigkeit von 2π pro Sekunde, bedeutet das, dass sich der Zeiger einmal pro Sekunde um den Kreis dreht ($360° = 2\pi$). Der Winkelgeschwindigkeit von 2π s^{1-} entspricht die Frequenz 1, es ist daher $\omega = 2\pi f$.

[2] Für reellwertige Signale schreiben wir $s(t)$, für komplexwertige schreiben wir $\vec{s}(t)$.

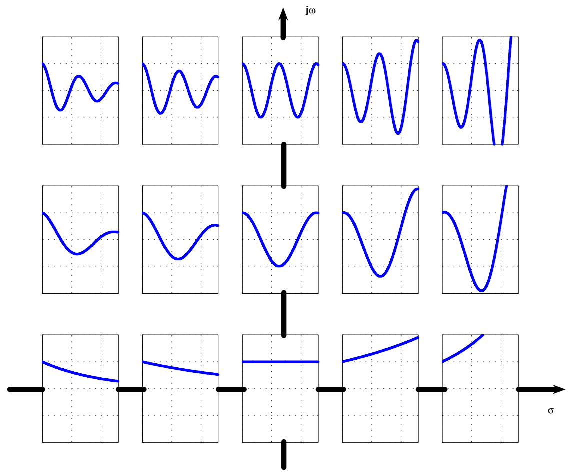

Abbildung 1.6: Realteil komplexe Exponentialfunktion

Bei der Rechnung mit komplexen Exponentialfunktionen gelten die im Anhang zusammengefassten Regeln der komplexen Rechnung. Die geometrische Interpretation der komplexen Rechnung liefert eine sehr anschauliche Deutung der Rechenoperationen.

1.3 Die komplexe Exponentialfunktion

Bei der Darstellung der Sinusfunktion haben wir uns der komplexen Schreibweise $\vec{s}(t) = Ae^{j(\omega_o t+\varphi)}$ bedient. Diese Notation hat den entscheidenden Vorteil, dass man damit leicht Rechnen kann. Die Erregung von Netzwerken läßt sich durch die Einführung der komplexen Exponentialfunktion weiter verallgemeinern. Die komplexe Exponentialfunktion ist wie folgt definiert

$$\vec{s}(t) = \vec{K}e^{st} \qquad \vec{K} = Ae^{j\varphi} \quad ; \quad s = \sigma + j\omega \tag{1.26}$$

Die "physikalischen" Zeitfunktionen erhält man aus der komplexen Exponentialfunktion durch Bildung des Real- oder Imaginärteils oder durch Addition zweier konjugiert komplexer Funktionen.

$$\begin{aligned} \mathrm{Re}\left\{\vec{K}e^{st}\right\} &= \frac{1}{2}\left[\vec{s}(t) + \vec{s}^{*}(t)\right] = \frac{\left|\vec{K}\right|}{2}e^{\sigma t}\left[e^{j(\omega t+\varphi)} + e^{-j(\omega t+\varphi)}\right] && (1.27) \\ &= \left|\vec{K}\right| e^{\sigma t}\cos\left(\omega t + \varphi\right) && (1.28) \end{aligned}$$

Abbildung 1.6 zeigt den Realteil der komplexen Exponentialfunktion in der komplexen Ebene $[\sigma,\, j\omega]$.

Die Bezeichnung komplexe Frequenz für $s = \sigma + j\omega$ ist streng genommen falsch, da im physikalischen Sinn nur der Imaginärteil ω eine (Kreis)Frequenz ist. Dennoch ist diese Bezeichnung üblich, da die Verwendung der komplexen Frequenz ausserordentlich zweckmäßig ist.

Die Einführung der komplexen Exponentialfunktion führt zu abstrakten Darstellungen von Signalen und in der Folge zu abstrakten Darstellungen der Eigenschaften von Systemen. Diese Darstellung hat aber entscheidende Vorteile bei der Analyse und Darstellung der Eigenschaften von Systemen.

1.4 Zusammenfassung

Um Signale (und Systeme) mathematisch erfassen zu können, setzen wir komplizierte Signale aus einfachen Aufbaufunktionen zusammen. Für diese einfachen Aufbaufunktionen ermitteln wir das Systemverhalten. Das Systemverhalten für kompliziertere Signale lässt sich bei linearen Netzwerken durch Überlagerung der Systemantworten der Aufbaufunktionen ermitteln.

Aufbaufunktionen sind die Impuls- und Sprungfunktion, die Sinusfunktion (reell oder komplex) und die komplexe Exponentialfunktion.