Kapitel 1

Systeme

Ein System ist eine Anordnung von miteinander verbundenen Komponenten zur Realisierung einer technischen Aufgabenstellung. Ein System kann als Operator aufgefasst werden, der Eingangsgrößen auf Ausgangsgrößen abbildet. Wird der Zusammenhang zwischen Eingang und Ausgang eines Systems mathematisch dargestellt, spricht man von Eingangs-Ausgangs-Verhalten des Systems. Ist das E/A-Verhalten – ohne die interne Struktur zu kennen – bekannt, spricht man vom System als "black box".

Wir schreiben formal

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix} = \mathcal{A} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \tag{1.1}$$

und beschreiben damit die Ausgangsgröße $\mathbf{y}$, die durch Wirkung des Systems $\mathcal{A}$ auf die Eingangsgröße $\mathbf{x}$ entsteht.

Ein elektrisches System, eine elektrische Schaltung, ist eine Zusammenschaltung von elektrischen Komponenten (Widerständen, Kondensatoren, Transistoren, ...). Bei einem elektrischen System werden die Systemeigenschaften durch das Verhalten der Bauelemente (z.B. das ohmsche Gesetz bei Widerständen) und durch die Verbindungen zwischen den Bauelementen (die Kirchhoff'schen Gesetze) bestimmt. Daraus entstehen Gleichungen, die Eingangs- und Ausgangsgrößen in Beziehung setzen. Diese Gleichungen stellen ein mathematisches Modell des elektrischen Systems dar.

Systeme können durch mathematische Modelle dargestellt werden. Die Systemzusammenhänge werden

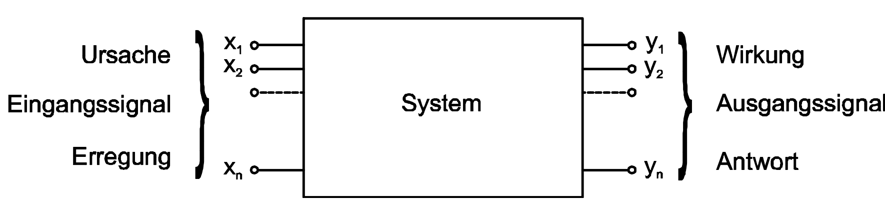

Abbildung 1.1: Blockdiagramm eines Systems

in Form von linearen und nichtlinearen Gleichungen oder linearen und nichtlinearen Differentialgleichungen erfasst. Die Lösung dieser Gleichungssysteme beschreibt das Systemverhalten. Die Lösung der Systemgleichungen ist häufig schwierig oder sogar unmöglich und man muss Vereinfachungen treffen oder findet nur numerische Lösungen.

Bei kontinuierlichen Eingangsgrößen treten die Systemgleichungen in Form von Differentialgleichungen auf, bei diskreten Systemen in Form von Differenzengleichungen.

Bei der Untersuchung von Systemen treten es folgende Aufgabenstellungen auf:

- Es muss ein mathematisches Modell und die Antwort des Systems auf eine gegebene Eingangsgröße gefunden werden. Diese Aufgabe nennt man Systemanalyse.
- Für eine gegebene Eingangsgröße und eine gewünschte Ausgangsgröße wird ein System gesucht. Diese Aufgabe nennt man Systemsynthese.
- Die dritte Möglichkeit, zu einem gegebenen System und einer bekannten Ausgangsgröße die Eingangsgröße zu bestimmen, hat keinen eigenen Namen. Diese Aufgabenstellung tritt in der Meßtechnik auf.

Systeme können nach unterschiedlichen Gesuchtspunkten eingeteilt werden, z.B.:

1. Lineare und nichtlineare Systeme
2. Zeitunabhängige und zeitabhängige Systeme
3. Dynamische und nichtdynamische Systeme
4. Kausale und nichtkausale Systeme
5. Systeme mit konzentrierten und verteilten Parametern
6. Zeitkontinuierliche und zeitdiskrete Systeme
7. Analoge, digitale oder hybride Systeme
8. Stabile und nichtstabile Systeme

1.1 Lineare und nichtlineare Systeme

1.1.1 Lineare Systeme

Lineare Systeme sind homogen und additiv und es gilt der Überlagerungssatz.

Ein System ist homogen, wenn folgender Zusammenhang gilt

$$\begin{aligned} \text{Ursache} &\rightarrow \text{Wirkung} \\ k \cdot \text{Ursache} &\rightarrow k \cdot \text{Wirkung} \end{aligned} \tag{1.2}$$

die k-fache Ursache führt zur k-fachen Wirkung.

Ein System ist additiv, wenn gilt

$$\begin{aligned} \text{Ursache1} &\rightarrow \text{Wirkung1} \\ \text{Ursache2} &\rightarrow \text{Wirkung2} \qquad (1.3) \\ \text{Ursache1+Ursache2} &\rightarrow \text{Wirkung1+Wirkung2} \qquad (1.4) \end{aligned}$$

Homogenität und Additivität zusammengefasst führt zum Überlagerungssatz

$$k_1 \cdot \text{Ursache1} + k_2 \cdot \text{Ursache2} \rightarrow k_1 \cdot \text{Wirkung1} + k_2 \cdot \text{Wirkung2}$$

Bei linearen Systemen durchlaufen Signale das System ohne zu interagieren!

Beispiel 1 *Ein praktisches Beispiel für die Anwendung des Überlagerungssatz liefert das Kopfrechnen: Das "Eingangssignal"* 3023 *wird über ein "System" mit der Eigenschaft* $x_A = 4x_E$ *"übertragen".*
3041 *wird im Kopf in die Ursachen* 3000+20+3 *zerlegt, die "Wirkungen" auf die Ursachen durch Multiplikation mit* 4 *ermittelt und die Gesamtwirkung durch Addition der Einzelwirkungen ermittelt* 12000+80+12 => 12092*.*

Da bei linearen Systemen der Überlagerungssatz gilt, können "komplizierte" Eingangssignale aus einfacheren Aufbausignalen zusammengesetzt werden. Für diese einfacheren Aufbausignale wird das Ausgangssignal des Systems ermittelt, die Summe aller Ausgangssignale der Komponenten liefert das Ausgangssignal des "komplizierten" Eingangssignals.

Es gibt viele Möglichkeiten Signale in Komponenten zu zerlegen, zwei Aufbausignale sind besonders wichtig: die Sinusfunktion (bzw. die komplexe Exponentialfunktion) und die Impulsfunktion.

Nichtlineares Verhalten

Als Beispiel eines einfachen nicht-linearen Systems betrachten wir ein einfaches quadratisches System.

Beispiel 2 *Wir zeigen das Verhalten des Systems* $x_A = x_E^2$*, wenn zwei Eingangssignale anliegen. Die Eingangssignale nennen wir Basissignal* $A\cos(\omega t)$ *und Trägersignal* $B\cos(\Omega t)$

$$\begin{aligned} [A\cos(\omega t) + B\cos(\Omega t)]^2 &= A^2\cos^2(\omega t) + 2A\cos(\omega t)B\cos(\Omega t) + B^2\cos^2(\Omega t) = \qquad (1.5) \\ &= \frac{A^2}{2}\left[1 + \cos(2\omega t)\right] + 2AB\cos(\omega t)\cos(\Omega t) + \frac{B^2}{2}\left[1 + \cos(2\Omega t)\right] \qquad (1.6) \end{aligned}$$

Wie wir sehen, durchlaufen die beiden Eingangssignale das (nichtlineare) quadratische Systems nicht *ohne Interaktion. Es entsteht eine Komponente der doppelten Basisfrequenz* ω*, eine Komponente der doppelten Trägerfrequenz* Ω *und das Produkt aus Basissignal und Trägersignal! Für dieses Produkt erhalten wir*

$$\cos(\Omega t)\cos(\omega t) = \frac{1}{2}\left[\cos(\Omega - \omega)t + \cos(\Omega + \omega)t\right] \qquad (1.7)$$

Es entstehen also am Ausgang des quadratischen Systems die Frequenzen $[0, 2\omega, \Omega - \omega, \Omega + \omega, 2\Omega]$*, die Frequenzen* Ω *und* ω *sind nicht mehr enthalten! Abbildung 1.2 zeigt die entstehenden Spektrallinien.*

Wie man leicht sieht, ist bei diesem Beispiel der Überlagerungsatz verletzt, da $[A\cos(\omega t)]^2 + [B\cos(\Omega t)]^2 \neq [A\cos(\omega t) + B\cos(\Omega t)]^2$.

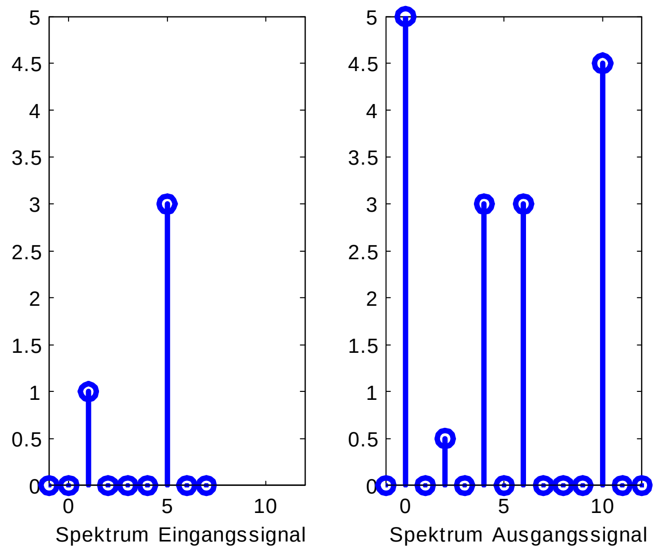

Abbildung 1.2: Spektrallinien bei quadratischem System

Beispiele für Systeme mit linearem Verhalten

- Elektrische Schaltkreise aus ohmschen Widerständen, Kondensatoren und Spulen
- Elektronische Schaltkreise wie Verstärker und Filter (innerhalb des Versorgungsspannungsbereichs)
- Mechanische Systeme aus Masse-Feder-Dämpfung
- Resonanz und Nullung
- Differentiation und Integration
- Ausbreitung von elektromagnetischen Wellen und Schallwellen in isotropen Medien
- Alle Systeme die durch lineare Differential- oder Differenzengleichungen beschrieben werden können.

Anmerkung 3 *Linearität von Systemen ist nur innerhalb gewisser physikalischer Grenzen gegeben. Werden diese Grenzen überschritten, verhalten sich Systeme nichtlinear bis sie begrenzt oder zerstört werden.*

Beispiele für Systeme mit nichtlinearem Verhalten

- Leistung eines elektrischen Widerstands $P(t) = R * I^{2}(t)$
- Nichtlineare elektronische Schaltungen wie Spitzendetektoren, Quadrierer, Frequenzverdoppler, Schwellwertschalter, Komparatoren
- Nichtlineare Effekte in elektronischen Schaltkreisen wie Begrenzen, nichtlineares Verstärken (slew rate), Sättigungseffekte

- Hysteresis-Effekte im magnetischen Schaltkreisen
- Multiplikation von Signalen wie bei der Frequenzmischung (Die Multiplikation mit einer Konstanten ist eine lineare Operation.)
- Digitale Logikgatter
- Ausbreitung von elektromagnetischen Wellen und Schallwellen in anisotropen Medien
- Alle Systeme deren Beschreibung auf nichlineare Differential- oder Differenzengleichungen führt.

Anmerkung 4 *In vielen nichtlinearen Systemen kann das System um den Betriebspunkt linearisiert werden und damit die nichtlineare auf eine lineare Beschreibung vereinfacht werden.*

1.2 Zeitunabhängige und zeitabhängige System

Ein System ist *zeitinvariant*, wenn ein um n_0 verzögertes (verschobenes) Eingangssignal, zu einem um n_0 verzögerten Ausgangssignal führt, das System also sein Übertragungsverhalten nicht mit der Zeit ändert. Ein lineares System ist zeitunabhängig, wenn die Koeffizienten der linearen Differentialgleichung (bei elektrischen Netzwerken die Werte der Bauelemente) konstant sind. Man spricht von **l**inearen und zeitinvarianten (**t**ime **i**nvariant) (LTI) Systemen.

In analogen Systemen ist Zeitinvarianz wegen der Temperaturabhängigkeit und Alterung der elektronischen Bauelemente in der Regel nur eingeschränkt gegeben, digitale Systeme haben hier einen klaren Vorteil, da ihr Übertragungsverhalten davon unbeeinflußt ist.

1.3 Dynamische und nichtdynamische Systeme

Ein System heißt nichtdynamisch (speicherlos), wenn die Antwort des Systems $y(t)$ nur vom Wert der Eingangsgröße $x(t)$ zur selben Zeit t abhängt. Bei dynamischen Systemen hängt die Ausgangsgröße nicht nur vom augenblicklichen Wert der Eingangsgröße, sondern auch von vergangenen Werten ab. Bei elektrischen Netzwerken sind Schaltungen mit Kondensatoren und Spulen dynamische Systeme (es wird elektrische und magnetische Energie in den Bauelementen gespeichert), bei digitalen Systemen kann der Speicher z.B. der Inhalt eines Registers sein.

1.4 Kausale und nichtkausale Systeme

Bei kausalen Systemen hängt die Systemantwort lediglich von gegenwärtigen und vergangenen Werten der Eingangsgröße ab, nicht jedoch zukünftigen Werten der Erregung. Ein kausales System kann erst antworten, wenn eine Eingangsgröße anliegt. Antwortet ein System ohne Anliegen einer Eingangsgröße, so muss es Kenntnis über das zukünftige Verhalten der Eingangsgröße haben, was bei physikalischen Systemen nicht möglich ist, da die Wirkung nicht vor der Ursache eintreten kann. Jedes praktische System, das in Echtzeit arbeitet, muss daher ein kausales System sein.

Kausalität hat nur eine Bedeutung wenn die Begriffe "vorher" und "nachher" eine Bedeutung haben. Bei der Signalverarbeitung von aufgezeichneten Daten verschwindet diese Bedeutung und Signalverarbeitungssysteme können dann auch nichkausal sein, eine Verarbeitung in Echtzeit ist dann aber nicht möglich.

1.5 Konzentrierte und verteilte Systeme

Bei der Beschreibung von elektrischen Systemen können wir häufig vereinfachte Bauelementbeziehungen annehmen. So gilt zum Beispiel das ohmsche Gesetz, das den Zusammenhang zwischen Spannungsabfall und Strom durch den Widerstand beschreibt, $U = RI$. Bei dieser Modellierung der elektrischen Zusammenhänge wird stillschweigend die Annahme gemacht, dass der Strom durch den Widerstand an jedem Punkt derselbe ist. In der Wirklichkeit ist diese Annahme nur eingeschränkt gültig, da sich elektrische Zustände nicht unendlich schnell, sondern nur mit endlicher Geschwindigkeit ausbreiten. In Wirklichkeit ist die elektrische Spannung an einem Widerstand, durch den ein Stromimpuls fließt nicht nur eine Funktion der Zeit, sondern auch des Ortes. Bei niedrigen Frequenzen oder genauer bei Wellenlängen, die groß gegen die geometrischen Abmessung der elektrischen Schaltung sind, kann die verteilte Natur der elektrischen Eigenschaften vernachlässigt werden.

Wenn diese Vereinfachung auf Grund der hohen Frequenzen nicht mehr möglich ist, müssen die Systeme, wie z.B. Leitungen, die mit hoher Signalfrequenz gespeist werden oder Antennen, in Abhängigkeit von Ort und Zeit dargestellt werden und es entstehen bei der Modellierung (lineare oder nichtlineare) partielle Differentialgleichungen.

1.6 Zeitkontinuierliche und zeitdiskrete Systeme

Systeme deren Eingangs- und Ausgangsgrößen zeitkontinuierlich sind, nennt man zeitkontinuierliche Systeme. Wenn die Einganggrößen abgetastet werden und die Werte der Eingangssignale nur zu bestimmten Zeitpunkten bekannt sind, spricht man von zeitdiskreten Systemen (Quantisierung im Zeitbereich).

1.7 Analoge und digitale Systeme

Zeitkontinuierlich bedeutet nicht analog und zeitdiskret bedeutet nicht digital. Ein analoges Signal ist ein Signal, das jeden beliebigen Wert innerhalb eines kontinuierlichen Bereiches annehmen kann. Ein analoges Signal kann also eine unendliche Anzahl von Amplitudenwerten annehmen.

Im Gegensatz dazu kann die Amplitude eines digitalen Signals kann nur eine endliche Zahl von Werten einnehmen (Quantisierung im Amplitudenbereich). Die Begriffe analog und digital beziehen sich auf die Signalamplitude und nicht auf die Zeitachse. Dennoch wird der Begriff analog häufig für zeit- *und* amplitudenkontinuierliche Systeme verwendet.

1.8 Stabilität

Technische Systeme müssen in der Regel stabile Systeme sein, d.h., ein System das durch externe Anregung aus der Ruhelage ausgelenkt wird, kehrt nach einiger Zeit wieder in die Ruhelage zurück. Die Definition von Stabilität kann vom Eingangs-Ausgangsverhalten ausgehen: Eingangsgrößen endlicher Amplitude (bounded input) produzieren Ausgangsgrößen endlicher Amplitude (bounded output). Diese Stabilitätsdefinition nennt man BIBO-Stabilität.

1.9 Zusammenfassung

Ein System ist eine Anordnung, bei der der Zusammenhang zwischen Ursache = Eingangssignal = Erregung und Wirkung = Ausgangssignal = Antwort formal mit der Beziehung $\mathbf{y} = \mathcal{A}.\mathbf{x}$ beschrieben wird. Die

Systemeigenschaften $\mathcal{A}$ werden durch einen nicht näher definierten Operator beschrieben. Systeme können aus physikalischen Komponenten (Hardware) bestehen oder durch einen Algorithmus (Software) beschrieben werden.

Elektrische Schaltungen (Systeme) bestehen aus miteinander verbundenen Baulementen (Widerständen, Kondensatoren, Spulen, ...). Die Systemeigenschaften $\mathcal{A}$ werden durch die Beziehung zwischen Strom und Spannung an den Bauelementen, sowie durch die Gesetze der Verbindung der Bauelemente (Kirchhoff'sche Gesetze) beschrieben, wodurch wir ein mathematisches Modell des Systesm erhalten. Im Gegensatz dazu werden digitale Filter durch einen Algorithmus beschrieben, der auf einem (Signal)-Prozessor ausgeführt werden oder in Hardware realisiert werden kann.

Systeme können nach unterschiedlichen Gesichtspunkten eingeteilt werden, von besonderer Bedeutung sind lineare, zeitinvariante (LTI) Systeme. Obwohl Systeme auf unterschiedlichste Art realisiert werden können, haben die unterliegenden mathematischen Modelle sehr viel Gemeinsamkeiten. Im weiteren Verlauf werden wird zeitkontinierliche und zeitdiskrete, analoge und digitale LTI-Systeme genauer untersuchen.