

Kapitel 1

Signale

Unter einem Signal verstehen wir eine Größe, die Information trägt. Beispiele für Signale sind biometrische Signale, Radarsignale, seismische Signale, Temperatursignale, Videosignale, ... Signale spielen eine zentrale Rolle bei physikalischen Messungen, in der Unterhaltungselektronik, in der Medizintechnik, in der Telekommunikation, um nur einige Beispiele zu erwähnen. Rechnersysteme kommunizieren mit der Umwelt über Signale.

Signale werden durch Variation physikalischer Größen repräsentiert, diese Größen können verändert, gespeichert und übertragen werden. Ein Signal kann mehrere Formen einer physikalischer Darstellung annehmen. So wird beispielsweise ein akustisches Signal in Form des Schalldrucks durch ein Mikrofon in ein elektrisches Signal umgewandelt. Dieses elektrische Signal kann zur Speicherung wiederum in ein magnetisches Signal bei einer Magnetbandaufzeichnung umgewandelt werden. Es kann aber auch in Form einer binären Zahlenfolge als Muster auf einer CD-ROM abgebildet werden.

Signale sind Eingangsgrößen in signalverarbeitende Systeme, die wiederum – nach Signalverarbeitung – Ausgangssignale erzeugen.

Elektrische (oder genauer elektromagnetische Signale) haben eine besondere Bedeutung in technischen Anwendungen, da sie gegenüber anderen Signalformen, z.B. Schallsignalen, unübertreffliche Vorteile haben: Elektrische Signale breiten sich fast mit Lichtgeschwindigkeit aus und können drahtgebunden oder drahtlos übertragen werden. Sie können relativ einfach erzeugt, verarbeitet und als magnetische Signale gespeichert werden. Elektrische Signale erlauben auch bei kleinsten Energien zuverlässige Signalübertragungen (z.B. Verbindungen zu Raumsonden).

Anmerkung 1 *Signale (Nachrichten, Informationen) sind an einen physikalischen Träger gebunden, was zur Folge hat, dass Signal-Verarbeitung mit Energieverbrauch verbunden ist.*

Signale treten als Nutz- und Störsignale auf und eine wichtige Aufgabe der Signalverarbeitung ist es, Störsignale zu unterdrücken. Ob ein Signal Nutz- oder Störsignal ist, hängt von der Anwendung ab. Ein "Regensignal" ist ein Nutzsignal für eine regengesteuerte Tempokontrolle, aber ein Störsignal für den Autofahrer.

Signale sind häufig Variationen einer physikalischen Größe in Abhängigkeit von der Zeit, Sprachsignale sind ein gutes Beispiel dafür. Derartige Signale sind eindimensionale kontinuierliche Signale, da sie nur von einer Variablen abhängen und da der Signalwert (innerhalb physikalischer Grenzen) beliebige Werte annehmen kann. Signale können aber auch eine Funktion des Ortes, z.B. ein Oberflächenprofil eines Werkstücks, sein. Signale

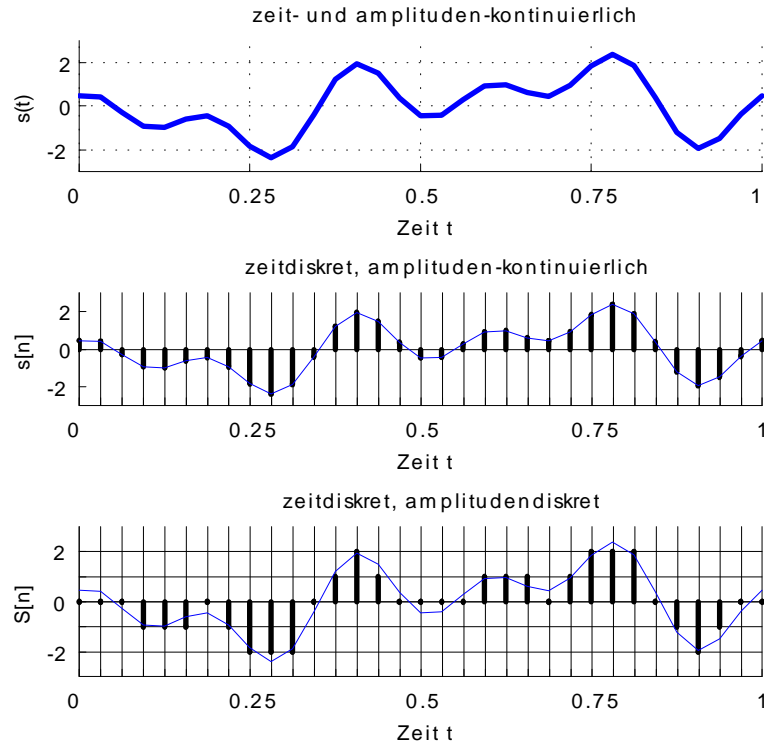


Abbildung 1.1: Analoges und digitale Signale

können auch zweidimensional sein, wie man am Beispiel von Bildsignalen (zweidimensionale Ortsfunktion) sehen kann. Wir beschäftigen uns im weiteren Verlauf nur mit Zeitsignalen.

Die Mehrzahl der Signale ist kontinuierlich. Durch Probenentnahme an ausgewählten Zeitpunkten (Abtastung) wird aus einem kontinuierlichen Signal ein zeitdiskretes Signal. Der Amplitudenwert des diskreten Signals kann, wie beim kontinuierlichen Signal, beliebige Werte annehmen. Wird ein Signal in einem digitalen Rechner gespeichert, müssen die Amplitudenwerte diskreter Signale als Zahlenwerte gespeichert werden und aus dem diskreten Signal wird ein zeit- und amplitudendiskretes (digitales) Signal.

Zeit- und amplituden-kontinuierliche Signale bezeichnet man als analoge Signale¹ und zeit- und amplituden-diskrete Signale als digitale Signale. Abbildung 1.1 zeigt die Zusammenhänge in graphischer Form.

¹Siehe Kapitel Systeme: Analoge und digitale Systeme

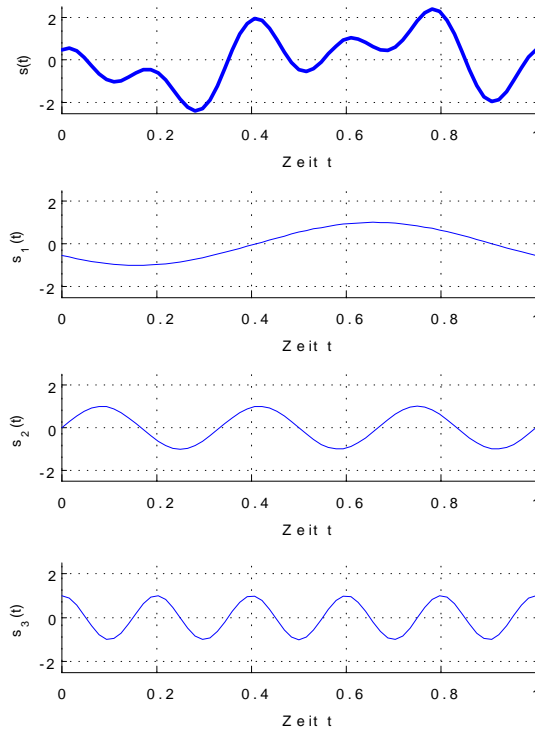


Abbildung 1.2: Summe von Sinusschwingungen $s(t) = s_1(t) + s_2(t) + s_3(t)$

1.1 Mathematische Darstellung von zeitkontinuierlichen Mathematische Darstellung von Signalen

Signale haben unterschiedliches Zeitverhalten und es gibt unendlich viele Signale. Es stellt sich daher die Frage, ob es möglich ist, Signale aus einfachen Grundsignalen zusammensetzen und damit die Untersuchung der Eigenschaften von Signalen und in der Folge die Bearbeitung von Signalen auf eine einfachere Basis zu stellen.

Das ist tatsächlich der Fall, wir erklären die Zusammenhänge am Beispiel von akustischen Signalen. Ein akustisches Signal kann man sich aus Tönen zusammengesetzt vorstellen. Töne wiederum lassen sich mit Hilfe von Sinusschwingungen beschreiben. Beim Wählen der Telefonnummer 58801, erzeugt die Tastatur zwei Töne pro Nummer und zwar: $5 \Rightarrow 770 \text{ Hz}$ und 1336 Hz , $8 \Rightarrow 852 \text{ Hz}$ und 1336 Hz , $8 \Rightarrow 852 \text{ Hz}$ und 1336 Hz , $0 \Rightarrow 941 \text{ Hz}$ und 1336 Hz , $1 \Rightarrow 697 \text{ Hz}$ und 1209 Hz . Das Wählverfahren wird daher dual tone multifrequency (DTMF) genannt. Signale lassen sich also aus Tönen zusammensetzen (synthetisieren), elektronische Musikinstrumente machen z.B. von dieser Möglichkeit Gebrauch.

Abbildung 1.2 zeigt ein aus mehreren Sinusschwingungen zusammengesetztes Signal.

1.2 Spektralsynthese

Komplizierte Signale lassen sich aus einfacheren Signalen aufbauen. Setzen wir Signale aus sinusoidalen Schwingungen zusammensetzen, dann erhalten wir

$$\begin{aligned} s(t) &= A_0 + A_1 \cos(\omega_1 t + \varphi_1) + \dots + A_K \cos(\omega_K t + \varphi_K) = \\ &= A_0 + \sum_{k=1}^N A_n \cos(\omega_k t + \varphi_k) = \sum_{k=0}^N A_n \cos(\omega_k t + \varphi_k) \end{aligned} \quad (1.1)$$

Da der Verlauf der Sinusschwingungen bekannt ist, braucht er nicht dargestellt zu werden. Es ist ausreichend, wenn man nur die Amplituden A_k und die Phasen φ_k über der Frequenz aufträgt. Man nennt diese Darstellung Amplituden- und Phasenspektrum. Man spricht auch von der Darstellung des Signals im Zeitbereich und im Frequenzbereich.

Die Darstellung von Signalen durch diskrete sinusoidale Schwingungen² bedeutet, das sich die Signale – ebenso wie die Sinusschwingungen – von $-\infty < t < \infty$ erstrecken. Die in der Wirklichkeit auftretenden Signale haben nur eine endliche Dauer und können nicht durch eine endliche Zahl von Frequenzkomponenten dargestellt werden. Signale endlicher Dauer werden mathematisch durch mit Hilfe der Fouriertransformation dargestellt.

Abbildung 1.3 zeigt die Sicht auf ein Signal im Zeit- und im Frequenzbereich. Die Ansicht von links zeigt eine Sägezahnswingung im Zeitbereich $s(t)$. Die Ansicht von vorne zeigt die einzelnen Spektralkomponenten – die Darstellung im Frequenzbereich $S(\omega)$ oder $S(f)$. (Der Gleichanteil – die 0.te Harmonische – wurde in Abbildung 1.3 weggelassen, damit die Zeichnung übersichtlicher ist.)

Abbildung 1.4 zeigt das Betragsspektrum einer Sägezahnswingung. Die einzelnen Spektralkomponenten werden als Linien dargestellt, deren Länge der Amplitude der Schwingung entspricht. Man spricht daher auch vom Linienspektrum. Eine Verdopplung der Frequenz entspricht einer Oktave in der Musik.

Anmerkung 2 *Zeit- und Frequenzbereich-Darstellung sind gleichwertig und lediglich andere Betrachtungsweisen für dasselbe Signal, wobei sich manche Signaleigenschaften besser im Zeitbereich, andere wiederum besser im Frequenzbereich darstellen lassen.*

Aus sinusoidalen Komponenten zusammengesetzte Signale können auch in komplexer Schreibweise dargestellt werden

$$\vec{s}(t) = X_0 + \sum_{n=1}^N A_n e^{j(\omega_n t + \varphi_n)} = X_0 + \sum_{n=1}^N \vec{X}_n e^{j\omega_n t} \quad \vec{X}_n = A_n e^{j\varphi_n} \quad (1.2)$$

Die Größe $\vec{X}_n = A_n e^{j\varphi_n}$ bezeichnet man als komplexe Amplitude. Die komplexe Amplitude ist eine mathematische Konstruktion, mit Hilfe der die Phasenverschiebung des Zeigers in die Amplitude verlagert wird. Damit ist eine kompaktere Schreibweise möglich, da sich der Ausdruck $e^{j(\omega_n t + \varphi_n)}$ auf $e^{j\omega_n t}$ vereinfacht. Das bedeutet aber nicht, dass sie Phase gleich Null wäre!

Der Kosinus kann mit Hilfe der inversen Euler'schen Form dargestellt werden $\cos(\varphi) = \frac{1}{2}(e^{j\varphi} + e^{-j\varphi})$. Daraus finden wir eine zweite Darstellung von sinusoidalen Schwingungen

$$s(t) = \frac{A_1}{2} e^{j(\omega_1 t + \varphi_1)} + \frac{A_1}{2} e^{-j(\omega_1 t + \varphi_1)} = \frac{\vec{X}_1}{2} e^{j\omega_1 t} + \frac{\vec{X}_1^*}{2} e^{-j\omega_1 t} \quad (1.3)$$

²Es können endlich oder unendlich viele Spektrallinien auftreten.

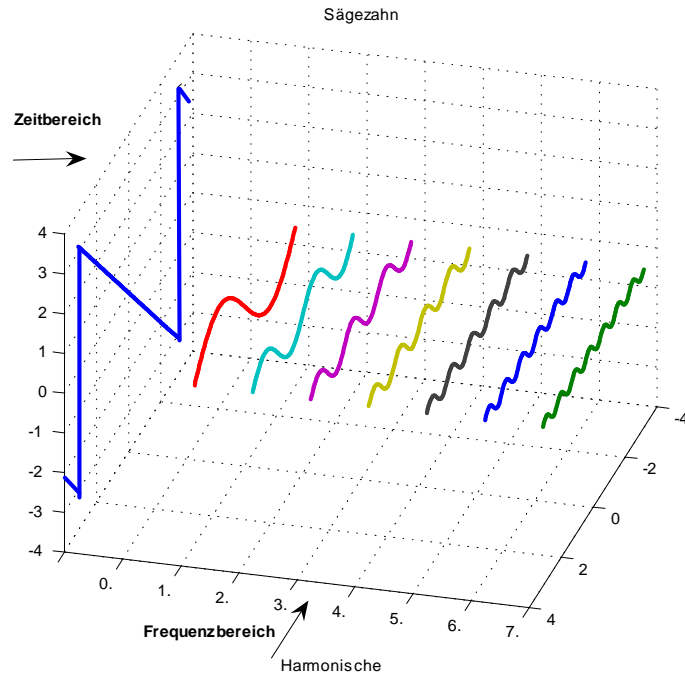


Abbildung 1.3: Signal im Zeit- und Frequenzbereich

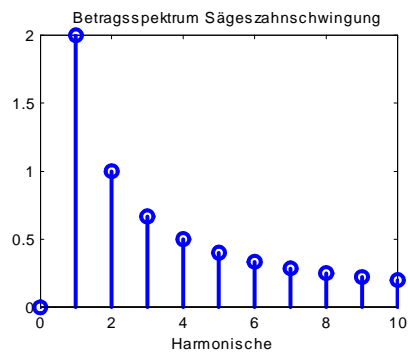
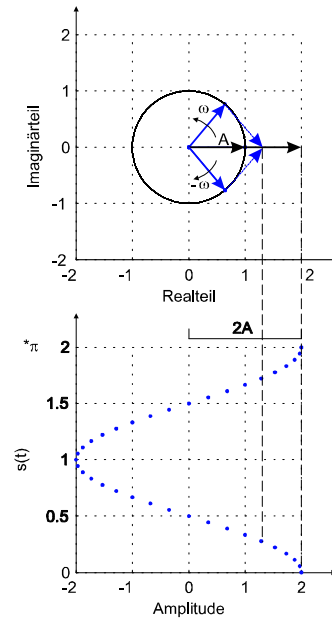


Abbildung 1.4: Spektraldarstellung

Abbildung 1.5: Zeiger mit entgegengesetzter Drehrichtung ω und $-\omega$

Gleichung (1.3) kann man sich als zwei mit gegengesetzter Drehrichtung rotierende Zeiger vorstellen, das (reellwertige) Signal $s(t)$ wird durch Addition der beiden Zeiger gebildet.

Abbildung 1.5 verdeutlicht diesen Zusammenhang. Die Summe der gegensinnig rotierenden Zeiger liegt immer auf der reellen Achse, $s(t)$ ist daher immer reellwertig.

Ein Signal das aus mehreren sinusoidalen Komponenten zusammengesetzt ist, lässt sich wie folgt darstellen

$$s(t) = X_0 + \sum_{n=1}^N \left\{ \frac{\vec{X}_n}{2} e^{j\omega_n t} + \frac{\vec{X}_n^*}{2} e^{-j\omega_n t} \right\} \quad (1.4)$$

Die Darstellung des Spektrums unter Verwendung der inversen Euler'schen Formel nennt man zweiseitiges Spektrum (1.3), die Darstellung nach (1.2) nennt man einseitiges Spektrum. Bei der Verwendung des zweiseitigen Spektrums treten negative Frequenzen auf, die man sich schwer vorstellen kann. Wie sich im weiteren Verlauf zeigen wird, haben aber auch negative Frequenzen eine physikalische Bedeutung.

1.3 Spektralanalyse

Wie wir gesehen haben, lassen sich Signale aus sinusoidalen Schwingungen synthetisieren. Häufig ist aber das Signal gegeben und man möchte daraus die Spektralkomponenten berechnen. Diese Aufgabe löst die Fourierzerlegung für uns. Wir geben die Zusammenhänge zunächst für *periodische* kontinuierliche Schwingungen an, werden diese Einschränkung aber im weiteren Verlauf – bei der Fouriertransformation – aufheben.

1.3.1 Fourierreihen

Eine *periodische* Funktion³ lässt sich durch eine Fourierreihe folgendermaßen darstellen

$$s(t) = \frac{A_0}{2} + A_1 \cos \omega_0 t + A_2 \cos 2\omega_0 t + \dots + A_k \cos k\omega_0 t + \\ + B_1 \sin \omega_0 t + B_2 \sin 2\omega_0 t + \dots + B_k \sin k\omega_0 t \quad (1.5)$$

Die Amplituden der einzelnen Schwingungen berechnet man

$$A_k = \frac{2}{T} \int_0^T s(t) \cos k\omega_0 t dt \quad (1.6)$$

$$B_k = \frac{2}{T} \int_0^T s(t) \sin k\omega_0 t dt \quad (1.7)$$

Die Periodendauer der Schwingung ist

$$T = \frac{2\pi}{\omega_0} = \frac{1}{f_0} \quad (1.8)$$

Wir sehen, dass sich $s(t)$ im allgemeinen Fall als eine Summe von Sinus- und Kosinusschwingungen plus einem konstanten Wert $A_0/2$ darstellen lässt. $A_0/2$ ist der Mittelwert der Funktion $s(t)$ und wird in der Elektrotechnik Gleichglied oder Gleichanteil genannt.

Es können auch abschnittsweise kontinuierliche Signale (z.B. Rechteck- oder Sägezahnschwingung) in eine Fourierreihe zerlegt werden. In den Sprungstellen konvergiert die Reihe auf den Mittelwert des Wertes links und rechts der Unstetigkeit $[s(t_0^-) + s(t_0^+)]/2$.

Wenn die Funktion $s(t)$ gerade ist, wenn also $s(t) = s(-t)$, dann treten in der Reihenentwicklung nur gerade Anteile auf. Da die Sinusfunktion ungerade ist, werden die Amplituden $B_k = 0$. Wenn die Funktion ungerade ist, wenn also $s(t) = -s(-t)$, dann treten in der Reihenentwicklung nur ungerade Anteile auf. Da die Kosinusfunktion gerade ist, werden die Amplituden $A_k = 0$.

Die Komponenten der Fourierzerlegung bestehen aus der Grundschwingung (der Schwingung mit der Periodendauer $T = 2\pi/\omega_0$) und Oberschwingungen, die immer *ganzzahlige* Vielfache der Grundschwingung sind. Die Oberschwingungen werden auch Harmonische genannt.

In diesem Zusammenhang stellt sich die Frage, ob die Summe von sinusförmigen Schwingungen beliebiger Frequenz eine periodische Schwingung bildet und wie man bei mehreren Sinusschwingungen unterschiedlicher Frequenz die Periodendauer ermittelt. Wir nehmen als Beispiel die Schwingungen

³Nicht jede periodische Funktion lässt sich in eine Fourierreihe zerlegen. Es leuchtet ein, dass für die Konvergenz einer Fourierreihe die Amplituden der Teilschwingungen endlich sein müssen. Das ist immer dann gegeben, wenn die periodische Funktion $s(t)$ absolut über eine Periode integrierbar ist, wenn also gilt: $\int_T |s(t)| dt < \infty$. Diese Bedingung ist jedoch nicht hinreichend. $s(t)$ darf darüber hinaus nur eine endliche Zahl von Maxima und Minima innerhalb einer Periode haben und darf nur eine endliche Zahl von endlichen Diskontinuitäten in einer Periode aufweisen. Diese *Dirichlet'schen Bedingungen* sind für alle praktischen Signale erfüllt.

$$\begin{aligned} s_1(t) &= 1 + 2 \sin\left(\frac{1}{2}t + \varphi_1\right) + 3 \sin\left(\frac{1}{3}t + \varphi_2\right) + 4 \sin\left(\frac{1}{5}t + \varphi_3\right) \\ s_2(t) &= 2 \sin(t + \varphi_1) + 3 \sin(\pi t + \varphi_2) \end{aligned}$$

Wir erinnern uns, dass jede Frequenzkomponente in einem periodischen Signal ein *ganzzahliges* Vielfaches der Grundfrequenz ω_0 sein muss. Daher ist das Verhältnis zweier beliebiger Teilschwingungen m/n , wobei m und n ganze Zahlen sind. Das bedeutet, dass das Verhältnis zweier beliebiger Teilschwingungen eine rationale Zahl sein muss. In unserem Beispiel sind die Kreisfrequenzen von $s_1(t)$: $(\frac{1}{2}, \frac{1}{3}$ und $\frac{1}{5})$ ganzzahlige Vielfache von $\frac{1}{15}$, sind also Harmonische. Die Kreisfrequenzen von $s_2(t)$ stehen im Verhältnis $1/\pi$. Dieses Verhältnis ist nicht rational, $s_2(t)$ ist daher *keine* periodische Schwingung.

Neben der Darstellung von Signalen in Sinus- und Kosinuskomponenten wählt man auch die Darstellung nach Betrag und Phase. Wir rechnen um und erhalten

$$C \cos(\omega_0 t + \varphi) = \underbrace{C \cos \varphi}_{A} \cos \omega_0 t - \underbrace{C \sin \varphi}_{B} \sin \omega_0 t \quad (1.9)$$

Aus $A = C \cos \varphi$ und $B = C \sin \varphi$ erhalten wir

$$C = \sqrt{A^2 + B^2} \quad \text{und} \quad \varphi = \arctan \frac{-B}{A} \quad (1.10)$$

Damit können wir die Fourierreihe nach Betrag und Phase darstellen

$$s(t) = C_0 + C_1 \cos(\omega_0 t + \varphi_1) + C_2 \cos(2\omega_0 t + \varphi_2) + \dots + C_k \cos(k\omega_0 t + \varphi_k) + \dots \quad (1.11)$$

wobei gilt

$$C_k = \sqrt{A_k^2 + B_k^2}, \quad \varphi_k = \arctan \left(\frac{-B_k}{A_k} \right) \quad \text{und} \quad C_0 = \frac{A_0}{2} \quad (1.12)$$

Die Darstellung nach Betrag und Winkel nach Gleichung (1.11) könnte man auch in Form der Sinusfunktion⁴ ausdrücken, die Kosinus-Darstellung wird aber meistens bevorzugt, da sich der Gleichanteil als Komponente der Frequenz Null darstellen lässt.

Wie man sieht, können periodische Schwingungen im Reellen durch Sinus- plus Kosinusfunktion (jeweils mit der Phase Null) oder durch eine Sinus- oder Kosinusfunktion mit allgemeiner Phase dargestellt werden.

Schließlich gibt es noch die komplexe Darstellung⁵

$$s(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \vec{D}_k e^{jk\omega_0 t} \quad (1.13)$$

Wie man leicht sehen kann, ergeben sich die Darstellungen im Reellen durch Bildung von Real- und Imaginärteil bzw. durch Bildung von Betrag und Phase aus der komplexen Darstellung.

⁴ $s(t) = c_0 + c_1 \sin(\omega_0 t + \varphi_1) + c_2 \sin(2\omega_0 t + \varphi_2) + \dots + c_k \sin(k\omega_0 t + \varphi_k) + \dots$
wobei gilt $c_k = \sqrt{A_k^2 + B_k^2}$, $\tan \varphi_k = \frac{A_k}{B_k}$ $c_0 = \frac{A_0}{2}$

⁵Die Schreibweise \vec{D} weist in der komplexen Darstellung auf den Zeigercharakter der Amplitude hin.

$$\vec{D}_k = \frac{1}{T} \int_0^T s(t) e^{-jk\omega_0 t} dt = \begin{cases} \frac{A_0}{2} & \text{für } k = 0 \\ \frac{1}{2}(A_k - jB_k) & \text{für } k > 0 \\ \frac{1}{2}(A_{-k} + jB_{-k}) & \text{für } k < 0 \end{cases} \quad (1.14)$$

Die komplexe Spektraldarstellung ist die leistungsfähigste und kompakteste aller Formen und wir werden uns daher im weiteren Verlauf häufig dieser Darstellung bedienen.

Aus der Euler'schen Beziehung können wir die Darstellung nach Betrag und Winkel $C_k \cos(\omega_0 t + \varphi_k)$ einfach in die komplexwertige Darstellung überführen

$$C_k \cos(k\omega_0 t + \varphi_k) = \frac{C_k}{2} \left[e^{j(k\omega_0 t + \varphi_k)} + e^{-j(k\omega_0 t + \varphi_k)} \right] = \quad (1.15)$$

$$= \underbrace{\left(\frac{C_k}{2} e^{j\varphi_k} \right)}_{\vec{D}_k} e^{jk\omega_0 t} + \underbrace{\left(\frac{C_k}{2} e^{-j\varphi_k} \right)}_{\vec{D}_{-k}} e^{-jk\omega_0 t} \quad (1.16)$$

und wir erhalten

$$s(t) = C_0 + \sum_{k=1}^{\infty} C_k \cos(k\omega_0 t + \varphi_k) \quad (1.17)$$

$$s(t) = D_0 + \sum_{k=-\infty}^{\infty} \vec{D}_k e^{jk\omega_0 t} \quad (1.18)$$

Der Zusammenhang zwischen der reellen (einseitiges Spektrum) und komplexen (zweiseitiges Spektrum) Darstellung ist

$$\vec{D}_k = \frac{1}{2} C_k e^{j\varphi_k} \quad C_k = 2 |\vec{D}_k|; \quad \varphi_k = \angle \vec{D}_k \quad (1.19)$$

Beispiel 3 Als Beispiel berechnen wir die Fourierkoeffizienten einer periodischen Rechteckfunktion nach Abbildung 1.6. Die Berechnung des Gleichglieds (des Mittelwerts) ist einfach: $\frac{A_0}{2} = \frac{1}{2}$. Die Länge der Periode beträgt $T = 2\pi$, die zugehörige Kreisfrequenz ist also $\omega = \frac{2\pi}{T} = 1$

$$A_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos kt dt = \frac{2}{k\pi} \sin\left(\frac{k\pi}{2}\right) = \begin{cases} 0 & k \text{ gerade} \\ \frac{2}{\pi k} & k = 1, 5, 9, 13, \dots \\ -\frac{2}{\pi k} & k = 3, 7, 11, 15, \dots \end{cases}$$

$$B_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sin kt dt = 0$$

Für die Reihenentwicklung ergibt sich daher:

$$s(t) = \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi} \left(\cos t - \frac{1}{3} \cos 3t + \frac{1}{5} \cos 5t - \frac{1}{7} \cos 7t + \dots \right)$$

$s(t)$ ist eine gerade Funktion, es treten daher in der Fourierreihe nur gerade Aufbaufunktionen, also Kosinusfunktionen auf.

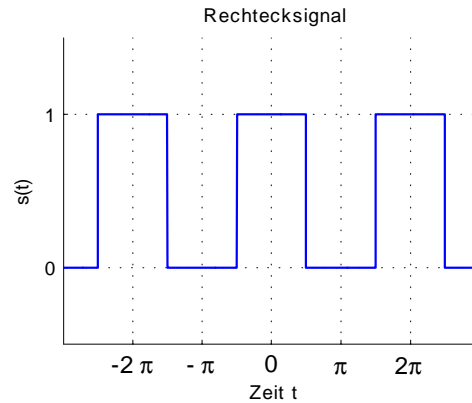


Abbildung 1.6: Rechteckschwingung

Beispiel 4 *Abbildung 1.7 zeigt die Fourierentwicklung, wenn die Reihe bei $n = 1, 3$ und 25 abgeschnitten wird. Man beobachtet, dass auch für großes n ein Überschwingen an den Unstetigkeitsstellen auftritt. Die Rechteckschwingung – ein Signal mit "Ecken" – wird durch Kosinusfunktionen – Signale ohne "Ecken" – nachgebildet. Es überrascht daher nicht, dass die Reihendarstellung nicht exakt ist. Die Näherung ist aber für $n \rightarrow \infty$ so gut, dass die Differenz der beiden Darstellungen die Energie Null hat.*

$$\int_0^T [f(t) - s_n(t)]^2 dt \rightarrow 0 \text{ für } n \rightarrow \infty.$$

Das Überschwingen verschwindet aber nicht, sondern erreicht für große n einen Wert von 9%. Diese Erscheinung wird Gibbs'sches Phänomen genannt.

Beispiel 5 *Als nächstes Beispiel betrachten wir die periodische Impulsfunktion mit der Periodendauer T*

$$s(t) = \begin{cases} A & 0 < t \leq \tau \\ 0 & \tau < t \leq T \end{cases} \quad (1.20)$$

Wir erhalten die Fourierzerlegung

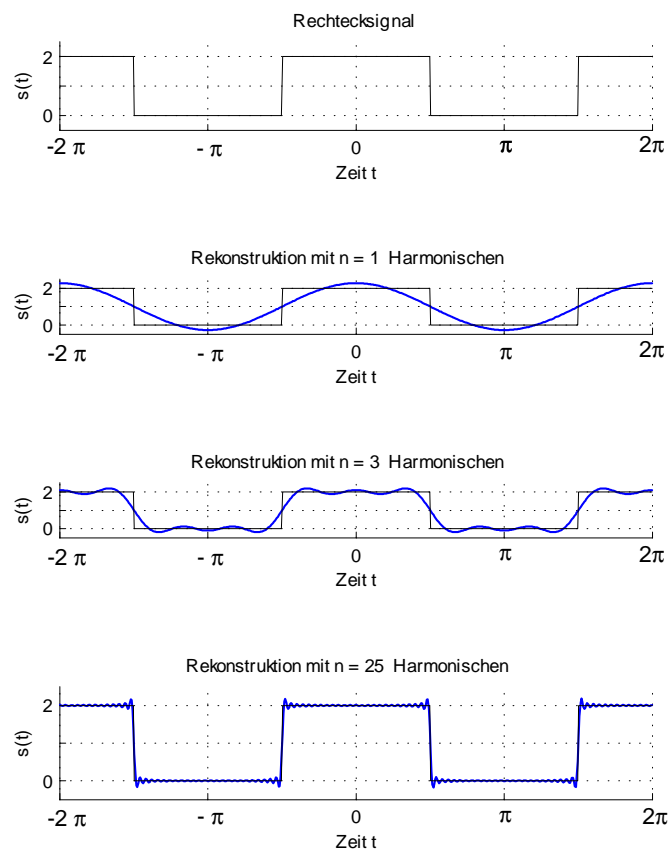
$$s(t) = A \frac{\tau}{T} + \sum_{k=1}^{\infty} \left[A \frac{\sin(k\omega_0\tau)}{k\pi} \cos(k\omega_0 t) + 2A \frac{\sin^2(k\omega_0\tau/2)}{k\pi} \cos(k\omega_0 t) \right] \quad (1.21)$$

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T} \quad (1.22)$$

Beim Tastverhältnis 1 : 1 (Rechteckschwingung) verschwindet die 2., 4., 6., ... Oberschwingung, beim Verhältnis 1 : 4 verschwindet die 4., 8., 12., ..., beim Verhältnis 1 : 5 die 5., 10., 15., ..., bei 1 : 10 die 10., 20., 30., ... Oberschwingung.

Lässt man $\tau \rightarrow 0$ gehen, dann werden aus den Rechteckimpulsen Diracimpulse $\delta_0(t)$ ($A\tau \equiv 1$) und wir erhalten

$$s_0(t) = \frac{1}{T} + \frac{2}{T} \sum_{k=1}^{\infty} \cos(k\omega_0 t) = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{jk\omega_0 t} \quad (1.23)$$

Abbildung 1.7: Fourierzerlegung für verschiedene n

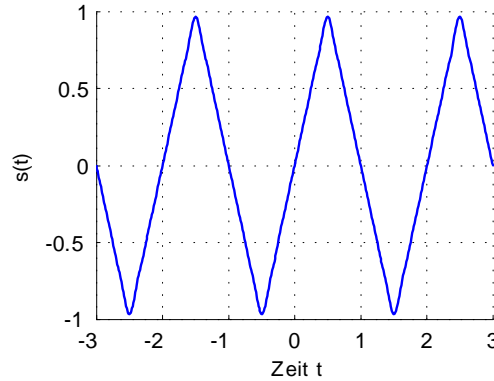


Abbildung 1.8: Dreieckschwingung

Das Signal $s_0(t)$, das aus Diracimpulsen im Abstand T besteht, wird Kammfunktion genannt. Die Kammfunktion enthält alle ganzzahligen Vielfachen von ω_0 von 0 bis ∞ !

Beispiel 6 Als weiteres Beispiel geben wir die Fourierentwicklung für eine Dreieckschwingung nach Abbildung 1.8 an. In diesem Beispiel ist die Länge der Periode $T = 2$ und daher $\omega = \frac{2\pi}{2} = \pi$. Der Mittelwert von $s(t) = 0$. Die Funktion ist ungerade, es entfallen daher die Kosinusanteile. Das Signal lässt sich darstellen

$$s(t) = \begin{cases} 2t & |t| \leq \frac{1}{2} \\ 2(1-t) & \frac{1}{2} < t \leq \frac{3}{2} \end{cases}$$

$$b_k = \int_{-1/2}^{1/2} 2t \sin k\pi t dt + \int_{1/2}^{3/2} 2(1-t) \sin k\pi t dt =$$

$$= \frac{8}{k^2 \pi^2} \sin\left(\frac{k\pi}{2}\right) = \begin{cases} 0 & k \text{ gerade} \\ \frac{8}{k^2 \pi^2} & k = 1, 5, 9, 13, \dots \\ -\frac{8}{k^2 \pi^2} & k = 3, 7, 11, 15, \dots \end{cases}$$

$$s(t) = \frac{8}{\pi^2} \left(\sin \pi t - \frac{1}{9} \sin 3\pi t + \frac{1}{25} \sin 5\pi t - \frac{1}{49} \sin 7\pi t + \dots \right)$$

Der Vergleich der Amplitudenspektren der Rechteck- und der Dreieckschwingung zeigt, dass die Amplituden der Oberschwingungen der Dreieckschwingung schneller abklingen als die der Rechteckschwingung. Die Rechteckschwingung hat einen höheren Oberschwingungsanteil, braucht also mehr Frequenzbandbreite, da mehr Schwingungen erforderlich sind, um den steilen Anstieg der Flanken "nachzuzeichnen".

Anmerkung 7 Rechteckschwingungen treten in digitalen elektronischen Schaltkreisen auf und haben einen hohen Oberschwingungsanteil. Bei hohen Taktfrequenzen können diese Oberschwingungen abstrahlen und elektromagnetische Interferenzen erzeugen, die zu Störungen benachbarter Geräte führen können.

Um zu einer zusätzlichen Sicht der Zusammenhänge zwischen Zeit- und Frequenzbereich zu gelangen, betrachten wir die Fourierreihe aus einem anderen Blickwinkel. Wir gehen dazu von der Darstellung in komplexer Schreibweise aus

$$s(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \vec{D}_k e^{jk\omega_0 t} \quad (1.24)$$

Zur Berechnung der Fourierkoeffizienten c_k multiplizieren wir (1.24) mit $e^{-jm\omega_0 t}$

$$s(t)e^{-jm\omega_0 t} = \left(\sum_{k=-\infty}^{+\infty} \vec{D}_k e^{jk\omega_0 t} \right) e^{-jm\omega_0 t} = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \vec{D}_k e^{j(k-m)\omega_0 t} \quad (1.25)$$

Integrieren wir nun über die Periodendauer T der periodischen Schwingung, so erhalten wir

$$\int_T e^{j(k-m)\omega_0 t} dt = \begin{cases} T & \text{für } k = m \\ 0 & \text{für } k \neq m \end{cases} \quad (1.26)$$

und damit die Fourierkoeffizienten

$$\vec{D}_k = \frac{1}{T} \int_T s(t) e^{-jk\omega_0 t} dt, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (1.27)$$

Um zu einer physikalischen Interpretation der Zusammenhänge zu kommen, gehen wir von Abbildung 1.9 aus, die einige Zeiger (D_1, D_{-2} und D_{+n}) von $s(t)$ zeigt, die mit unterschiedlichen Winkelgeschwindigkeiten $k\omega_0$ rotieren. Die Summe aller rechts- und linksdrehenden Zeiger ergibt die Funktion $s(t)$.

Möchte man \vec{D}_k einer Frequenzkomponente bestimmen, dreht man das ganze Zeigerdiagramm mit $k\omega_0$ in Gegenrichtung, multipliziert also mit $e^{-jk\omega_0 t}$. Dadurch "steht" die betrachtete Komponente, während sich alle anderen Komponenten mit Vielfachen von ω_0 drehen. Bildet man nun den Mittelwert über die Periode T , so ergibt sich \vec{D}_k für diese Komponente. Für die anderen – sich drehenden Komponenten – ist der Mittelwert Null, da der Mittelwert einer Kreisfunktion über Vielfache ihrer Periode Null ist.

1.3.2 Parseval'sches Theorem

Wir wissen, dass die Fourierentwicklung eines periodischen Signals durch die Beziehung

$$s(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^N C_k \sin(\omega_k t + \varphi_k) \quad (1.28)$$

dargestellt werden kann. Selbstverständlich muss die Leistung des gesamten Signals $s(t)$ gleich der Summe der Leistungen seiner spektralen Komponenten sein. Zur Berechnung der Leistung eines periodischen Signals berechnet man die Energie pro Periode und es ergibt sich (zur Vereinfachung wird die Phase weggelassen)

$$\begin{aligned} P &= \frac{1}{T} \int_T (C_k \sin \omega_k t)^2 dt = \frac{C_k^2}{2T} \int_T (1 - \sin 2\omega_k t) dt = \\ &= \frac{C_k^2}{2T} T - \frac{C_k^2}{2T} \int_T \sin 2\omega_k t dt = \frac{C_k^2}{2} \end{aligned} \quad (1.29)$$

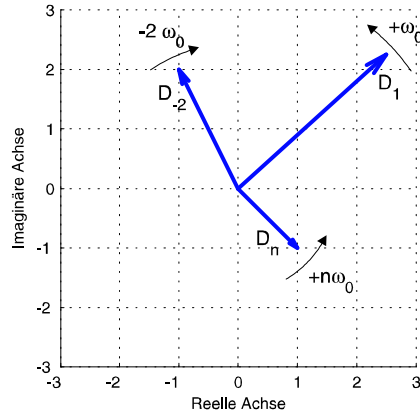


Abbildung 1.9: Signal in Zeigerdarstellung

Die Leistung eines sinusförmigen Signals ist unabhängig von der Frequenz und beträgt $C_k^2/2$. Wir erhalten für die Leistung eines beliebigen periodischen Signals

$$P_s = \left(\frac{a_0}{2}\right)^2 + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} C_k^2 \quad (1.30)$$

1.3.3 Numerische Berechnung der Fourierkoeffizienten

Häufig liegen Signale nicht in analytischer Form vor oder lassen sich nur schwer analytisch darstellen. In diesen Fällen kann man die Fourierkoeffizienten durch numerische Berechnung des Integrals (1.31) ermitteln.

$$\vec{D}_k = \frac{1}{T} \int_T s(t) e^{-jk\omega_0 t} dt, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (1.31)$$

Zur Berechnung des Integrals (der Fläche) zerlegen wir die Fläche in rechteckige Streifen im Abstand T_s . Bei der Periodendauer T erhalten wir dadurch $N = T/T_s$ Streifen, die summiert werden müssen.

$$\vec{D}_k = \frac{1}{T} \int_T s(t) e^{-jk\omega_0 t} dt, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots = \quad (1.32)$$

$$= \lim_{T_s \rightarrow 0} \frac{1}{T} \sum_{n=0}^{N-1} s(nT_s) e^{-jk\omega_0 nT_s T_s} \quad (1.33)$$

Mit den Abkürzungen $\Omega_0 = \omega_0 T_s$ und $N = T/T_s$ erhalten wir

$$\vec{D}_k = \lim_{T_s \rightarrow 0} \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} s(nT_s) e^{-jk\Omega_0 n} \quad (1.34)$$

Für praktische Berechnungen können wir T_s beliebig klein, aber nicht Null machen, was bedeutet, dass bei der numerischen Berechnung des Integrals immer ein Fehler auftreten wird. Wenn wir diesen Fehler ignorieren, erhalten wir für die Fourierkoeffizienten

$$\vec{D}_k = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} s(nT_s) e^{-jk\Omega_0 n} \quad (1.35)$$

Je größer N gewählt wird, d.h. je schmaler die rechteckigen Streifen werden, desto kleiner ist der Fehler der numerischen Integration

Durch Einsetzen sehen wir, dass $\vec{D}_{k+N} = \vec{D}_k$, was bedeutet, dass das Spektrum \vec{D}_k sich mit der Periodendauer N wiederholt! Die Beziehung nach Gleichung (1.35) nennt man diskrete Fouriertransformation (DFT), die im Kapitel über das Abtasttheorem genauer behandelt wird. Die DFT liefert die Koeffizienten \vec{D}_k für $n \geq 0$ bis $n = N/2$. Die Koeffizienten oberhalb von $N/2$ sind wegen der Periodizität des Spektrums $\vec{D}_{k+N} = \vec{D}_k$ die Koeffizienten der negativen Frequenzen. Für $N = 64$ ist daher $\vec{D}_{33} = \vec{D}_{-31}$, $\vec{D}_{34} = \vec{D}_{-30}, \dots$, $\vec{D}_{63} = \vec{D}_{-1}$.

Ein besonders effizienter Algorithmus zur Berechnung der Gleichung (1.35) ist die Fast Fourier Transformation (FFT), für die N eine Potenz von Zwei – $N = 2^m$, $m \dots$ ganzzahlig – sein muss.

Beispiel 8 Als Beispiel berechnen wir die Fourierkoeffizienten der gleichgerichteten Sinusschwingung $s(t) = |\sin \omega_0 t|$ mit Hilfe von Matlab. Wir berechnen die Werte von $s(t)$ beginnend bei $t = 0$, den letzten Wert entnehmen wir an der Stelle $t = T - T_s$. (Der letzte Wert ist nicht an der Stelle T , da dieser Wert identisch mit dem Wert an der Stelle $t = 0$ ist, die neue Periode beginnt an der Stelle $t = T$.)

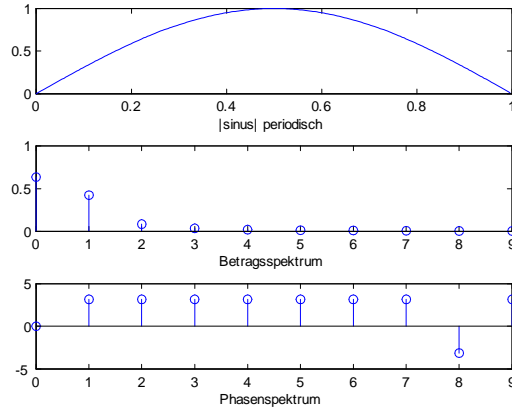
```
N=256;
t=linspace(0,1,(N+1));
t=t([1:N]);
s=abs(sin(pi*t));
subplot(311), plot(t,s), xlabel '|sinus| periodisch'
d=fft(s)/N; % komplexes Spektrum
dMag=abs(d); dPhase=angle(d);
M=10; % Fourierkoeffizienten von M Spektrallinien
d0=dMag(1); dM=2*dMag(2:M); % Umrechnen auf einseitiges Spektrum
cMag=[d0,dM]; cPhase=dPhase(1:M);
subplot(312), stem((0:(M-1)),cMag), xlabel 'Betragsspektrum';
subplot(313), stem((0:(M-1)),cPhase), xlabel 'Phasenspektrum';N=256;
Abbildung 1.10 zeigt die Zeit- und Frequenzbereichdarstellung.
```

Aus einer Formelsammlung erhalten wir die Fourierzerlegung der gleichgerichteten Sinusschwingung ($T = \pi$, $\omega = 2\pi/T = 2$)

$$s(t) = \frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi} \left(\frac{\cos 2t}{1.3} + \frac{\cos 4t}{3.5} + \frac{\cos 6t}{5.7} + \dots \right) = \quad (1.36)$$

$$= 0.6366 - 0.4244 \cos 2t - 0.0849 \cos 4t - 0.0364 \cos 6t + \dots \quad (1.37)$$

Vergleich der analytischen und numerischen Lösung

Abbildung 1.10: Spektrum von $|\sin(t)|$

<i>Betrag (FFT)</i>	<i>Phase (FFT)</i>	<i>Betrag (Reihe)</i>	<i>Phase (Reihe)</i>
0.6366	0	0.6366	0
0.4244	3.1416	0.4244	π
0.0849	3.1416	0.0849	π
0.0364	3.1416	0.0364	π
0.0202	3.1416	0.0202	π
0.0129	3.1416	0.0129	π
0.0089	3.1416	0.0089	π
0.0065	3.1416	0.0065	π
0.0050	-3.1416	0.0050	$\pi \triangleq -\pi^6$
0.0040	3.1416	0.0039	π

Beispiel 9 Als weiteres Beispiel berechnen wir das Spektrum der periodischen Parabelfunktion nach Abbildung 1.11 auf numerischem Weg.

Durch analytische Berechnung erhalten wir

$$s(t) = \frac{1}{3} - \frac{4}{\pi^2} \left(\cos \pi t - \frac{1}{4} \cos 2\pi t + \frac{1}{9} \cos 3\pi t - \frac{1}{16} \cos 4\pi t + \dots \right) = \quad (1.38)$$

$$= \frac{1}{3} + \frac{4}{\pi^2} \left[\cos(\pi t - \pi) + \frac{1}{4} \cos 2\pi t + \frac{1}{9} \cos(3\pi t - \pi) - \frac{1}{16} \cos 4\pi t + \dots \right] \quad (1.39)$$

$$= \frac{1}{3} + \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{4}{k^2 \pi^2} \cos(k\pi t) \quad (1.40)$$

Wir sehen einen scheinbaren Widerspruch zwischen der numerischen Berechnung, die für die Phase der

⁶Der Phasensprung tritt durch numerische Ungenauigkeit auf.

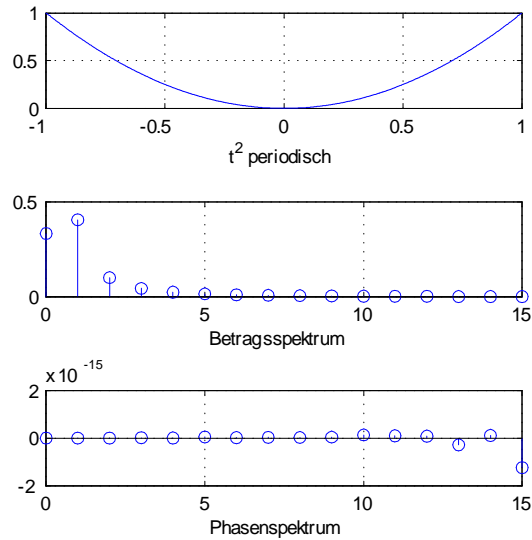


Abbildung 1.11: Spektrum von $s(t) = t^2$

Spektrallinien Null ($< 10^{-15}$) liefert, während bei der analytischen Berechnung die Phase der Spektrallinien abwechselnd $-\pi$ und Null ist.

Werten wir die analytische Berechnung aus und summieren die ersten 16 Frequenzkomponenten, dann erhalten wir Abbildung 1.12

Abbildung 1.12 (a) liefert die Synthese nach (1.38).

Abbildung 1.12 (b) stellt die periodische Funktion $s(t) = (1 - t)^2$ dar und unterscheidet sich von Abbildung (a) lediglich durch die Zeitverschiebung. Das Spektrum der periodischen Funktion $(1 - t)^2$ ist $s(t) = \frac{1}{3} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{4}{k^2 \pi^2} \cos(k\pi t)$, die Kosinusfunktionen haben die Phase Null. Diese Lösung haben wir auch bei der numerischen Berechnung gefunden.

1.3.4 Die Fouriertransformation

Wir haben die Darstellung im Frequenzbereich durch Entwicklung einer periodischen Funktion in eine Fourierreihe eingeführt. Periodische Funktionen sind theoretische Konstrukte, die bei tatsächlichen Signalen nicht auftreten können, da jedes praktische Signal endliche Dauer hat.

Zur mathematischen Darstellung des endlichen (= aperiodischen) Signals $f(t)$ erzeugen wir ein neues Signal $f_T(t)$, indem wir $f(t)$ in Intervallen von T wiederholen und damit die aperiodische Funktion periodisch machen. Dieses periodische Signal $f_T(t)$ können wir in eine Fourierreihe zerlegen. Lassen wir nun die Periodendauer gegen unendlich gehen $T \rightarrow \infty$ erhalten wir daraus unser endliches, aperiodisches Signal

$$\lim_{T \rightarrow \infty} f_T(t) = f(t) \tag{1.41}$$

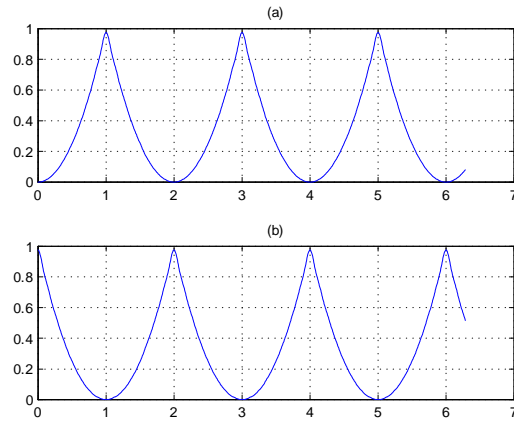


Abbildung 1.12: Frequenzsynthese der periodischen Funktion t^2 für $-1 \leq t \leq 1$

Abbildung 1.13 stellt diesen Zusammenhang graphisch dar.

Führen wir diesen Grenzübergang durch, dann erhalten wir nach einer Reihe von Rechenschritten

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{j\omega t} d\omega \quad (1.42)$$

Gleichung (1.42) nennt man Fourierintegral. Ein aperiodisches Signal lässt sich mit dem Fourierintegral (im Gegensatz zur Fourierreihe beim periodischen Signal) darstellen. Zum Unterschied von der Fourierreihe, bei der diskrete Spektrallinien \vec{D}_k auftreten

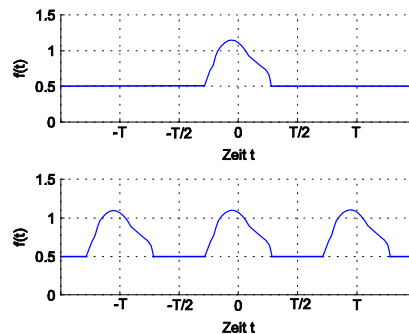


Abbildung 1.13: Aperiodisches Signal periodisch fortgesetzt

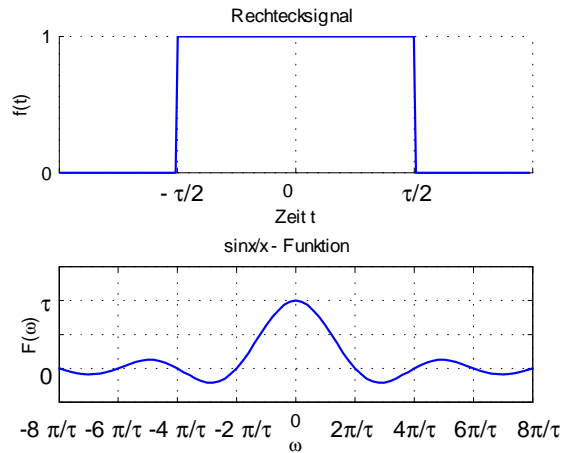


Abbildung 1.14: Rechteckimpuls im Zeit- und Frequenzbereich

$$s(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \vec{D}_k e^{jk\omega_0 t},$$

tritt bei der Fouriertransformation ein kontinuierliches⁷ Spektrum $F(\omega)$ auf, wobei $F(\omega)$ in der Regel komplex ist. $F(\omega)$ ist eine Spektraldichtefunktion, wird aber meistens kurz als Spektrum bezeichnet.

Wir fassen die Darstellung aperiodischer Signale im Zeit- und Frequenzbereich zusammen

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt$$

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{j\omega t} d\omega$$

$F(\omega)$ wird direkte, $f(t)$ wird inverse Fouriertransformation genannt.

Bei aperiodischen Signalen treten keine Spektrallinien sondern ein Spektraldichtespektrum auf, d.h. die "Spektrallinien" sind in infinitesimalem Abstand und das Spektrum erstreckt sich immer von $-\infty$ bis ∞ .

Beispiel 10 Als Beispiel der Anwendung der Fouriertransformation berechnen wir das Spektrum eines rechteckigen Impulses nach Abbildung 1.14.

⁷Kontinuierliche Spektren sind aus der Physik bekannt, weisses Licht setzt sich z.B. aus den Spektralfarben des Regenbogens zusammen.

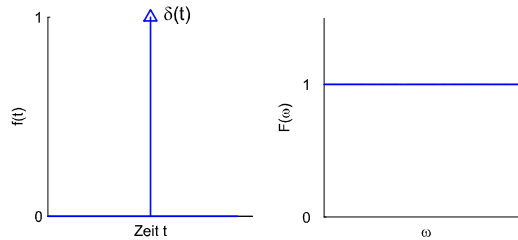


Abbildung 1.15: Einheitsimpuls

$$\begin{aligned}
 F(\omega) &= \int_{-\tau/2}^{\tau/2} e^{-j\omega t} dt = -\frac{1}{j\omega} \left(e^{-j\omega\tau/2} - e^{j\omega\tau/2} \right) = \frac{2 \sin\left(\frac{\omega\tau}{2}\right)}{\omega} \\
 &= \tau \frac{\sin\left(\frac{\omega\tau}{2}\right)}{\left(\frac{\omega\tau}{2}\right)} = \tau \operatorname{sinc}\left(\frac{\omega\tau}{2}\right)
 \end{aligned}$$

Diese Funktion wird *sinc-Funktion*⁸ genannt. Die *Si-Funktion* erstreckt sich von $-\infty < \omega < \infty$. Das Spektrum des Rechtecksignals der Abbildung 1.14 ist reell. Der *Si-Funktion* werden wir noch öfter begegnen.

Beispiel 11 Wir berechnen die Fouriertransformierte des Einheitsimpulses:

$$\begin{aligned}
 F\{\delta_0(t)\} &= F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) e^{-j\omega t} dt = 1 \\
 \delta_0(t) &\iff 1
 \end{aligned}$$

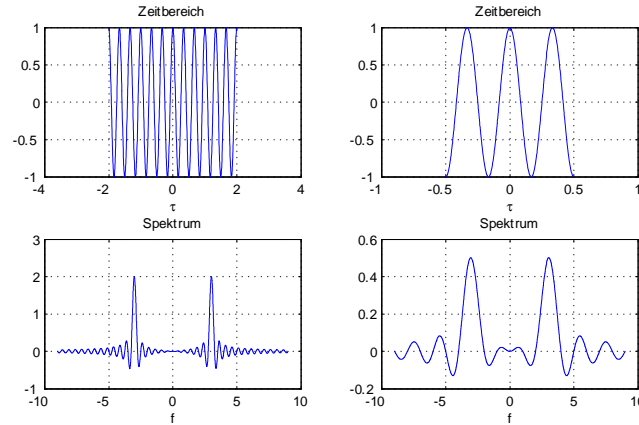
Abbildung 1.15 stellt den Einheitspuls im Zeit- und im Frequenzbereich dar. Die Impulsfunktion ist keine echte Funktion und beschreibt keine eindeutige Funktion. Wir sehen an diesem Beispiel, dass lediglich die Wirkung der Impulsfunktion auf eine andere Funktion – $e^{-j\omega t}$ – untersucht wird.

Anmerkung 12 Das Spektrum der Impulsfunktion enthält alle Frequenzen von $-\infty$ bis ∞ , deren Amplitude ist für alle Frequenzen gleich ist. Im Impuls "stecken" also Frequenzen. Diese Eigenschaft macht die Impulsfunktion für die Untersuchung von Systemen aus theoretischer Sicht so bedeutend. Legt man an den Eingang eines Systems einen Impuls an, so wird dieses System gleichzeitig mit allen Frequenzen angeregt. Aus messtechnischer Sicht ist der Impuls weniger geeignet, er müsste die Amplitude ∞ haben, was technisch nicht möglich ist. Für messtechnische Zwecke ist die Sprungfunktion $\delta_{-1}(t)$ besser geeignet.

1.3.5 Frequenz und Zeit – Unschärfepinzipp

Wir untersuchen eine zeitlich begrenzte Kosinusfunktion mit der Amplitude $A = 1$

⁸In der deutschsprachigen Literatur wird diese Funktion *Si-Funktion* oder *Spaltfunktion* genannt. Wir verwenden wie in Matlab die Bezeichnung *sinc-Funktion*.

Abbildung 1.16: Spektrum Kosinusburst $f_0 = 3$, $\tau = 2$ und $\tau = 0.5$

$$f(t) = \begin{cases} \cos \omega_0 t & -\tau \leq t \leq \tau \\ 0 & |t| > \tau \end{cases} \quad (1.43)$$

Wir wissen von der Fouriertransformation, dass bei zeitbegrenzten Signalen ein Dichtespektrum und keine diskreten Spektrallinien auftreten. Es kann daher die in Gleichung (1.43) auftretende Frequenz ω_0 nicht als diskrete Spektrallinie auftreten!

Wir berechnen die Dichtefunktion von (1.43). Da $f(t)$ eine gerade Funktion ist, können wir $F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-j\omega t} dt \Rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cos(\omega t) dt$ vereinfachen und erhalten

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cos(\omega t) dt = \int_{-\tau}^{\tau} \cos(\omega_0 t) \cos(\omega t) dt = \quad (1.44)$$

$$= \frac{1}{2} \int_{-\tau}^{\tau} [\cos(\omega_0 - \omega)t + \cos(\omega_0 + \omega)t] dt = \quad (1.45)$$

$$= \frac{1}{2} \left[\frac{\sin(\omega_0 - \omega)t}{\omega_0 - \omega} + \frac{\sin(\omega_0 + \omega)t}{\omega_0 + \omega} \right]_{-\tau}^{\tau} = \quad (1.46)$$

$$= \left[\frac{\sin(\omega_0 - \omega)\tau}{\omega_0 - \omega} + \frac{\sin(\omega_0 + \omega)\tau}{\omega_0 + \omega} \right] = \quad (1.47)$$

$f(t)$ und $F(\omega)$ sind in Abbildung 1.16 dargestellt und zeigt Kosinusbursts der Kreisfrequenz $\omega_0 = 3$, einmal mit der Periodendauer $\tau = 2$ und einmal mit der Periodendauer $\tau = 0.5$. Die Nulldurchgänge des Spektrums errechnen sich aus den Nulldurchgängen der Sinus-Funktion $\sin(\omega - \omega_0)\tau = 0 \Rightarrow \omega - \omega_0 = n\pi$, für $n = (0, 1, 2, \dots)$. An der Stelle $\omega \rightarrow \omega_0$ wird $F(\omega_0) = \tau$, die Nullstellen von $F(\omega)$ liegen, von ω_0 ausgehend, in den Abständen π/τ .

Wir erkennen deutlich, dass die Spektraldichte im Bereich von $\omega_0 = 3$ größer wird. Je länger die Zeitdauer τ des Kosinusbursts, desto näher rücken die die Nullstellen zusammen und desto besser entspricht der Burst der kontinuierlichen Kosinusschwingung. Im Grenzfall $\tau \rightarrow \infty \Rightarrow \Delta\omega \rightarrow 0$ erhalten wir die kontinuierliche Kosinusschwingung mit dem Spektrum $F(\omega) \rightarrow \delta_0(\omega - \omega_0)$, also eine Spektrallinie.

Wir können aus Abbildung 1.16 erkennen, dass das Spektrum, d.h. die "Frequenz" einer zeitlich begrenzten Kosinusfunktion – *unscharf* – ist. Bezeichnen wir die Breite der Hauptkeule der Funktion in Abbildung 1.16 als Spektrum, so erhalten wir $\Delta\omega = 2\frac{\pi}{\tau}$, bzw. $\Delta f = \frac{1}{\tau}$. Die Zeitdauer der Kosinusschwingung beträgt $\Delta t = 2\tau$. Damit erhalten wir für den Zusammenhang zwischen Frequenz und Zeitdauer die Beziehung (Unschärfepinzip)

$$\Delta f \cdot \Delta t = 1 \quad (1.48)$$

Anmerkung 13 *Je kürzer die Zeitdauer Δt eines Signals desto breiter Δf wird sein Spektrum; umgekehrt gilt, je schmaler das Spektrum, desto länger die Zeitdauer des Signals. Zeitdauer und Spektrum sind untrennbar verbunden, Zeit und Frequenz können nicht unabhängig voneinander gemessen werden.*

1.3.6 Numerische Berechnung der Fouriertransformation

Wenn sich die Transformation $F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-j\omega t} dt$ nicht analytisch berechnen lässt, muss das Spektrum numerisch berechnet werden. Da unsere Zeitsignale sich nur von 0 bis T erstrecken wird

$$F(\omega) = \int_0^T f(t)e^{-j\omega t} dt \quad (1.49)$$

$$F(\omega) \approx \sum_{n=0}^{N-1} f(t)e^{-j\omega n\Delta t} \Delta t \quad t \rightarrow n\Delta t, \quad \Delta t = \frac{T}{N} \quad (1.50)$$

Δt (bzw. die Zahl der Werte N) muss so gewählt werden, dass die gewünschte Genauigkeit bei der numerischen Integration erreicht wird.

Wir tasten das Signal $f(t)$ mit $f_{\text{abstast}} = \frac{1}{\Delta t}$ ab und nehmen an, dass die Spektralkomponenten des Signals oberhalb der halben Abtastfrequenz $|\omega| \geq \omega_{\text{max}} = \frac{1}{2}\omega_{\text{abstast}}$ vernachlässigbar sind. Das Zeitsignal setzt sich dann aus seinen spektralen Komponenten wie folgt zusammen

$$f(n\Delta t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\omega_{\text{max}}}^{\omega_{\text{max}}} F(j\omega)e^{j\omega n\Delta t} d\omega \quad (1.51)$$

Unter Verwendung der DFT erhalten wir

$$F(k\Delta\omega) \approx \Delta t \sum_{n=0}^{N-1} f(k\Delta t) e^{-jk\Delta\omega n\Delta t} \quad (1.52)$$

$$\Delta\omega = \frac{1}{N} 2\pi \frac{1}{\Delta t} \quad (1.53)$$

$$F(n\Delta\omega) \approx \Delta t \sum_{n=0}^{N-1} f(k\Delta t) e^{-j\frac{2\pi}{N}kn} \quad (1.54)$$

Die Fouriertransformierte einer nichtperiodischen Funktion $f(t)$ kann also numerisch mit Hilfe der DFT berechnet werden

$$F(k\Delta\omega) = \begin{cases} \frac{1}{f_{\text{abtast}}} F[k] & k < N/2 \\ 0 & k \geq N/2 \end{cases} \quad (1.55)$$

wenn das Signal mit $f_{\text{abtast}} = \frac{1}{\Delta t} = \frac{T}{N}$ abgetastet wird und die Spektralkomponenten bei Frequenzen größer als $\frac{N}{2T}$ vernachlässigbar sind.

1.4 Zusammenfassung

In diesem Kapitel haben wir gezeigt, dass periodische Signale durch Überlagerung von sinusförmigen Funktionen dargestellt werden können. Wir können ein Signal als Zeitfunktion oder als Summe von sinusförmigen Komponenten betrachten und gelangen dadurch zur Darstellung im Zeit- und im Frequenzbereich.

Periodische Signale sind immer aus ganzzahligen Vielfachen der Grundschwingung aufgebaut, im Frequenzbereich führt das zu Linienspektren. Signale die aus sinusförmigen Schwingungen zusammengesetzt sind, deren Frequenzverhältnis nicht rational ist, sind keine periodischen Signale, haben aber ebenfalls ein Linienspektrum. Die Breite des Spektrums hängt vom Signal ab, Linienspektren können endliche Breite haben oder können sich von $-\infty$ bis ∞ erstrecken.

Signale sind in der Regel nicht periodisch, sondern haben endliche Dauer. Für die Berechnung der Spektralkomponenten aperiodischer Signale wird die Fourierreihe zur Fouriertransformation. Aus dem Linienspektrum der periodischen Signale wird das kontinuierliche Spektrum der aperiodischen Signale. Das Spektrum eines aperiodischen Signals erstreckt sich immer von $-\infty$ bis ∞ .

Der Aufbau der Fourierreihe und der Fouriertransformation ist sehr ähnlich.

$$\begin{aligned} s(t) &= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} D_k e^{jk\omega_0 t} & \Leftrightarrow & \quad D_k = \frac{1}{T} \int_0^T s(t) e^{-jk\omega_0 t} dt \\ f(t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{j\omega t} d\omega & \Leftrightarrow & \quad F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt \end{aligned}$$

Bei der Fourierreihe wird das Zeitsignal als Summe von diskreten komplexen Exponentialfunktionen $e^{jk\omega_0 t}$ mit den (komplexen) Amplituden D_k dargestellt. Bei der Fouriertransformation wird das Zeitsignal als Summe von unendlich vielen (Integral) komplexen Exponentialfunktionen $e^{j\omega t}$ mit der (komplexen) Amplitudendichte $F(\omega)$ dargestellt.

Die Amplitude der Frequenzkomponenten D_k des periodischen Signals errechnet man aus dem Zeitsignal $s(t)$ durch "Anhalten" des Zeigerdiagramms, indem man es mit der Frequenz der gesuchten Komponente in die

gegengesetzte Richtung $e^{-jk\omega_0 t}$ dreht und den Mittelwert (Integration) bildet. In ähnlicher Weise erhält man die "Frequenzkomponenten" $F(\omega)$ des aperiodischen Signals aus dem Zeitsignal $f(t)$ durch "Anhalten" des Zeigerdiagramms, indem man es mit der Frequenz der gesuchten Komponenten in die gegengesetzte Richtung $e^{-j\omega t}$ dreht und den Mittelwert (Integration) bildet. Zum Unterschied vom periodischen Signal liegen die "Spektrallinien" ∞ dicht nebeneinander, man erhält daher die Frequenzdichte $F(\omega)$.