Komplexe Zahlen

Komplexe Zahlen treten in der Schule zum ersten Mal bei der Lösung von quadratischen Gleichungen auf. Wir nehmen die Gleichung $x^2 + 6x + 25$ als Beispiel. Diesen Gleichungstyp können wir mit folgender Formel lösen:

$$x^2 + px + q = 0 \quad \Rightarrow \quad x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q} \tag{1}$$

Für unsere Gleichung erhalten wir $x_{1,2} = -3 \pm \sqrt{9-25} = -3 \pm \sqrt{-16}$ und sehen, dass diese Gleichung keine Lösung im Reellen hat, da die Zahl unter der Wurzel negativ ist. Durch die Einführung der imaginären Einheit[1]

$$j = \sqrt{-1} \tag{2}$$

wird der Zahlenbereich erweitert und wir finden als Lösung die komplexen Zahlen $x_{1,2} = -3 \pm j4$.

In diesem Kapitel wird der Umgang mit komplexen Zahlen zusammenfassend dargestellt, insbesondere sehen wir, dass

- das Rechnen mit komplexen Zahlen den Regeln der Algebra folgt (Die imaginäre Einheit i wird wie eine Konstante behandelt.),
- die Euler'sche Formel eine Brücke zwischen der Welt der Algebra und der Welt der Geometrie bildet,
- die Zeigerdarstellung ein mächtiges Werkzeug liefert, um sinusförmige Signale darzustellen, die wiederum eine wichtige Rolle in der Elektrotechnik und Signalverarbeitung spielen.

Die Bezeichnung „komplexe Zahlen“ verleitet dazu, an komplizierte Zahlen zu denken. Komplexe Zahlen vereinfachen jedoch die Rechnung erheblich und der „imaginäre“ Anteil hilft wesentlich bei der Vorstellung und Darstellung elektrotechnischer Zusammenhänge.

0.1 Darstellung komplexer Zahlen

Komplexe Zahlen sind aus reellen und imaginären Zahlen zusammengesetzt. Eine komplexe Zahl wird dargestellt als

$$z(x,y) = x + jy = \mathrm{Re}\{z\} + j\,\mathrm{Im}\{z\} \tag{3}$$

[1] In der Mathematik wird die imaginäre Einheit mit i abgekürzt. In der Elektrotechnik wird die imaginäre Einheit mit j abgekürzt, um Verwechslungen zu vermeiden, da i die Abkürzung für den Strom ist.

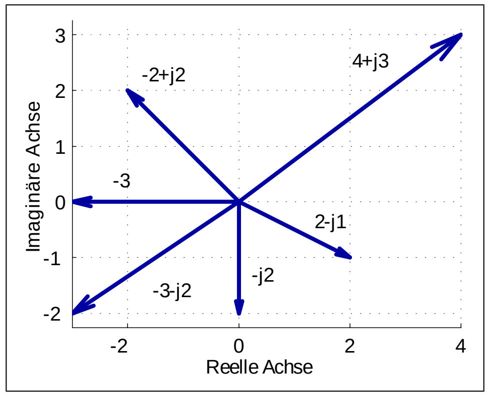

Abbildung 1: Zeiger in der komplexen Ebene

wobei x und y reelle Zahlen sind und Realteil und Imaginärteil von z heißen.

Anschaulich werden die komplexen Zahlen als Punkte der Ebene mit den Koordinaten x und y dargestellt. Diese Ebene wird komplexe oder Gauß'sche Zahlenebene genannt. Die x-Achse stellt dabei die reellen Zahlen, die y-Achse die imaginären Zahlen dar. Eine komplexe Zahl wird in der Gauß'schen Zahlenebene als Pfeil vom Koordinatenursprung zum Punkt mit den Koordinaten (x, y) in der komplexen Ebene dargestellt, wie Abbildung 1 zeigt.

Für diesen "Pfeil" wählen wir den Begriff *Zeiger*, ein Zeiger stellt eine komplexe Zahl in der Zahlenebene dar. In der Literatur wird bei der Darstellung komplexer Zahlen auch häufig die Bezeichnung Vektor verwendet. Unter Vektoren versteht man in Physik und Elektrotechnik gerichtete Größen wie Kräfte, Beschleunigungen oder Feldstärken. Komplexe Zahlen sind *keine* gerichteten Größen, zur Unterscheidung von Vektoren wird daher der Begriff Zeiger verwendet.

Neben der Darstellung komplexer Zahlen in kartesischen Koordinaten ist auch die Darstellung in Polarkoordinaten möglich, wie die Abbildung 2 zeigt. In polarer Form ist ein Zeiger durch seine Länge r und seine Richtung (φ) definiert. Die Richtung (der Winkel) kann entweder im Grad- oder im Bogenmaß angegeben werden. Beim Rechnen mit Winkeln, ist das Bogenmaß praktischer, für die Vorstellung ist das Gradmaß anschaulicher, wir müssen daher oft vom Bogenmaß in das Gradmaß umgerechnen. Der Kreisumfang (gemessen in rad) beträgt 2π und entspricht dem Winkel von $360°$, der Umrechnungsfaktor vom Bogen- in das Gradmaß beträgt daher

$$\varphi\,[\mathrm{rad}] \times (360/2\pi) = \varphi\,[\mathrm{rad}] \times (180/\pi) \rightarrow \varphi\,[°]\,. \tag{4}$$

Da das Rechnen in Bogenmaß einfacher ist, die Vorstellung aber im Gradmaß einfacher ist, wird häufig der Umrechnungsfaktor beim Anschreiben von Winkeln explizit angeschrieben. Der Winkel von $45°$ erscheint dann als $45 \cdot \frac{\pi}{180}$ im Bogenmaß.

Für die Polardarstellung kann die Schreibweise $z = r\angle\varphi$ gewählt werden. Die Darstellung von Zeigern in kartesischen Koordinaten (Real- und Imaginärteil) und Polarkoordinaten (Betrag und Winkel) ist selbstverständlich äquivalent: $3 + j4 \Leftrightarrow 5\angle 37°$

Beispiel 1 *Zahlen = [4 + 3j,-2 + 2j,-3,-3 - 2j,-2j,2 - 1j];*
abs(Zahlen) $\Rightarrow$ *5.0 2.8 3.0 3.6 2.0 2.2*
*Winkel = (180/pi)*angle(Zahlen)* $\Rightarrow$ *37 135 180 -146 -90 -27*

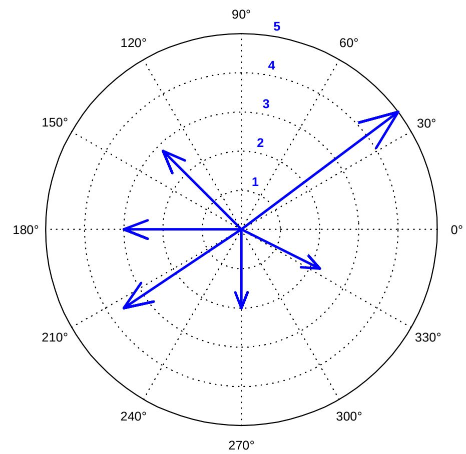

Abbildung 2: Zeiger in Polardarstellung

Welche Form der Darstellung verwendet wird, hängt von der Rechenaufgabe ab: Addition und Subtraktion lassen sich einfacher mit Real- und Imaginärteil berechnen, Multiplikation und Division einfacher mit Betrag und Winkel. Im Zuge einer Rechnung wechselt man daher immer wieder die Koordinatensysteme.

Abbildung 3 stellt die Zusammenhänge zwischen kartesischen und Polarkoordinaten graphisch dar

$$\begin{aligned} x &= r\cos\varphi; \quad y = r\sin\varphi; \quad z = r\cos\varphi + j\,(r\sin\varphi) \\ r &= \sqrt{x^2+y^2}; \quad \tan\varphi = \frac{y}{x} = \frac{\text{Imaginärteil}}{\text{Realteil}}; \quad \varphi = \arctan\frac{y}{x} \end{aligned} \tag{5}$$

Anmerkung 2 *Bei der Umrechnung von kartesischen Koordinaten in Polarkoordinaten ist Vorsicht geboten, da der Arcustangens nur zwischen* $-90°$ *und* $+90°$ *definiert ist. Abbildung 4 zeigt worauf geachtet werden muss. Bei der Berechnung des Winkels* φ *des Zeigers* $-4+j3$ *erhalten wir* $\varphi = \arctan(\mathrm{Im}\,/\,\mathrm{Re}) = \arctan(-\frac{3}{4}) = -0.6435$ *rad* $= -36.87°$. *Wir sehen aber aus unserer Zeichnung, dass der Winkel zwischen* $90°$ *und* $180°$ *liegen*

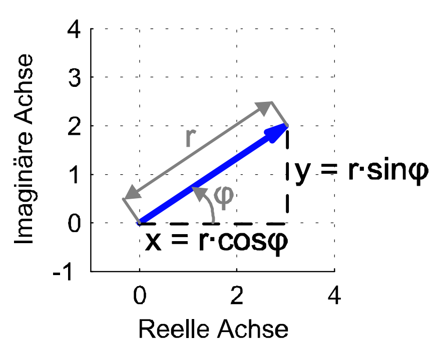

Abbildung 3: Polar - kartesisch

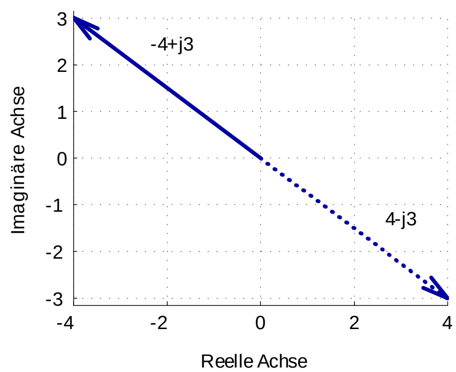

Abbildung 4: Zeiger im 2. Quadranten

muss!
Das Argument des Arcustangens ist in unserem Beispiel negativ, da der Realteil negativ und der Imaginärteil positiv ist. Das Argument wäre aber auch dann negativ, wenn der Realteil positiv und der Imaginärteil negativ wäre. In Abbildung 4 ist dieser Fall durch den punktierten Zeiger dargestellt. Da der arctan *nur zwischen* $-90°$ *und* $+90°$ *definiert ist, ist* -0.6435 *auch der Winkel des Zeigers* $4 - j3$*!*
Unser Zeiger liegt aber im zweiten Quadranten, der korrekte Winkel beträgt daher $\pi - 0.6435 \asymp (180° - 36.87°)$.
Dieses Problem tritt immer *auf, wenn Zeiger im zweiten oder dritten Quadranten liegen.*

Beim händischen Rechnen mit komplexen Zahlen kann man sich leicht verrechnen, Matlab stellt aber eine Reihe von Hilfsfunktionen zur Verfügung, die das Rechnen erleichtern.

Matlab-Funktion	**Eigenschaft**	**Beispiel**
`real(z)`	Realteil von z	`real(3-4i)` $\Rightarrow$ `3`
`imag(z)`	Imaginär von z	`imag(3-4i)` $\Rightarrow$ `-4`
`abs(z)`	Betrag von z	`abs(3-4i)` $\Rightarrow$ `5`
`angle(z)`	Winkel von z	`angle(3-4i)` $\Rightarrow$ `-0.9273`
`conj(z)`	z konjugiert komplex	`conj(3-4i)` $\Rightarrow$ `3+4i`

In der Matlab-Funktion `angle()` ist der Winkel von $-\pi$ bis π definiert, das arctan Problem tritt daher nicht auf.

0.2 Die Euler'schen Formeln

Mit der Schreibweise $z = r\angle\varphi$ können Zeiger in Polarform dargestellt werden. Es gibt aber eine wesentlich elegantere und leistungsfähigere Form der Darstellung, die durch die Euler'sche Formel gegeben ist.

$$e^{j\varphi} = \cos\varphi + j\sin\varphi \tag{6}$$

Die Euler'sche Formel lässt sich durch Reihenentwicklung wie folgt beweisen[2]

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots \tag{7}$$

Durch Einsetzen des Arguments $j\varphi$ erhalten wir

$$\begin{aligned} e^{j\varphi} &= 1 + j\varphi - \frac{\varphi^2}{2!} - j\frac{\varphi^3}{3!} + \frac{\varphi^4}{4!} + j\frac{\varphi 5}{5!} + \cdots \\ &= \underbrace{1 - \frac{\varphi^2}{2!} + \frac{\varphi^4}{4!} - \cdots}_{\cos\varphi} + \underbrace{j(\varphi - \frac{\varphi^3}{3!} + \frac{\varphi 5}{5!} - \cdots)}_{+j\sin\varphi} \end{aligned} \tag{8}$$

$$\begin{aligned} \sin\varphi &= \varphi - \frac{\varphi^3}{3!} + \frac{\varphi 5}{5!} - \cdots \\ \cos\varphi &= 1 - \frac{\varphi^2}{2!} + \frac{\varphi^4}{4!} - \cdots \end{aligned}$$

Die obigen Zusammenhänge sind rein *algebraisch* hergeleitet, wir können aber die Euler'sche Formel (6) auch *geometrisch* interpretieren. Die Funktion $e^{j\varphi}$ ist äquivalent mit der Polardarstellung $1\angle\varphi$, stellt also einen Zeiger der Länge 1 und mit dem Winkel φ dar. Der Zeiger $r\angle\varphi$ ist also äquivalent mit $re^{j\varphi}$ wie in Abbildung 5 gezeigt.

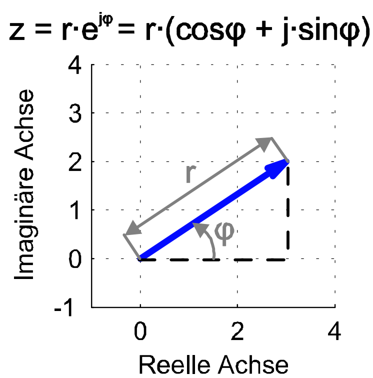

Abbildung 5: Geometrische Interpretation der Euler'schen Formel

Anmerkung 3 *Beachten Sie, dass der Beweis der Richtigkeit der Euler'schen Formel auf Basis der Algebra erbracht wurde! Die Zahlendarstellung in der komplexen Ebene liefert die geometrische Interpretation. Die Euler'sche Formel bildet eine Brücke zwischen der Welt der Algebra und der Welt der Geometrie!*

[2] Bei $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + ...$ handelt es sich um eine Potenzreihe, die für alle x aus dem Konvergenzbereich $(-\infty, \infty)$ absolut und gleichmäßig konvergiert. Deshalb darf man die Reihe umordnen und sie konvergiert gegen den gleichen Grenzwert.

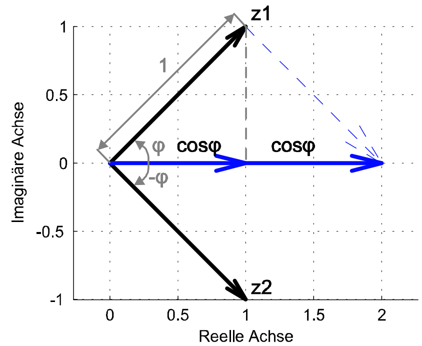

Abbildung 6: Rechts- und linksdrehende Zeiger

Formen wir die Euler'sche Formel um, dann gelangen wir nach einigen Zwischenschritten zu einer zweiten Form der Darstellung

$$\begin{aligned} e^{j\varphi} &= \cos\varphi + j\sin\varphi \\ e^{-j\varphi} &= \cos\varphi - j\sin\varphi \\ + - -- &= - - - - - - - - - \\ e^{j\varphi} + e^{-j\varphi} &= 2\cos\varphi \end{aligned}$$

Wie man leicht ausrechnen kan, lässt sich auch der Sinus durch $e^{j\varphi}$ ausgedrücken. Zusammengefasst erhalten wir die inversen Euler'schen Formeln:

$$\cos\varphi = \frac{e^{j\varphi} + e^{-j\varphi}}{2}; \quad \sin\varphi = \frac{e^{j\varphi} - e^{-j\varphi}}{2j} \tag{9}$$

Abbildung 6 zeigt, dass der Kosinus durch die Zusammensetzung von zwei Zeigern (mit positivem und negativem Winkel φ) gebildet wird. Aus den komplexwertigen Funktionen $e^{j\varphi}$ und $e^{-j\varphi}$ entsteht die reellwertige Funktion $\cos(\varphi)$.

Die Kreisfunktionen Sinus und Kosinus lassen sich wie folgt darstellen

$$\begin{aligned} \cos\varphi &= \mathrm{Re}\{e^{j\varphi}\} \quad \text{oder} \quad \cos\varphi = \frac{e^{j\varphi} + e^{-j\varphi}}{2} \\ \sin\varphi &= \mathrm{Im}\{e^{j\varphi}\} \quad \text{der} \quad \sin\varphi = \frac{e^{j\varphi} - e^{-j\varphi}}{2i} \end{aligned}$$

Anmerkung 4 *Die Darstellung der reellwertigen und anschaulichen Kreisfunktionen durch komplexwertige und wenig anschauliche Exponentialfunktionen mag zunächst verwirrend sein, bringt aber beträchtliche Vereinfachungen bei der Rechnung.*

Die Rechenregeln für den Umgang mit Zeigern können sowohl über die Algebra als auch über die Geometrie gefunden werden. Wir fassen zunächst die algebraischen Rechenregeln zusammen und geben dann eine geometrische Interpretation zur Erleichterung des Verständnisses.

0.3 Rechenregeln für komplexe Zahlen

Die Rechenregeln für die komplexen Zahlen folgen den Rechenregeln der Algebra, wobei lediglich zu beachten ist, dass die mit j gekennzeichneten Imaginärteile eigene Größen darstellen und dass $j^2 = -1$.

0.3.1 Regeln für kartesische Koordinaten

Addition

$$z_1 + z_2 = (x_1 + jy_1) + (x_2 + jy_2) = (x_1 + x_2) + j(y_1 + y_2) \tag{10}$$

$(-2 + 3i) + (6 - 9i) = 4 - 6i$

Subtraktion

$$z_1 - z_2 = (x_1 + jy_1) - (x_2 + jy_2) = (x_1 - x_2) + j(y_1 - y_2) \tag{11}$$

$(-2 + 3i) - (6 - 9i) = -8 + 12i$

Multiplikation

$$\begin{aligned} z_1 \times z_2 &= (x_1 + jy_1) \times (x_2 + jy_2) && (12) \\ &= x_1x_2 + jx_1y_2 + jy_1x_2 + j^2y_1y_2 && (13) \\ &= (x_1x_2 - y_1y_2) + j(x_1y_2 + y_1x_2) \end{aligned}$$

$(-2 + 3i) \times (6 - 9i) = 15 + 36i$

Konjugiert komplexe Zahl

$$z_1^* = z_1^{'} = (x_1 + jy_1)^* = (x_1 - jy_1) \tag{14}$$

$(-2 + 3i)^* = -2 - 3i$

Division

$$\begin{aligned} z_1 \div z_2 &= (x_1 + jy) \div (x_2 + jy_2) && (15) \\ \frac{z_1}{z_2} &= \frac{z_1 z_2^*}{z_2 z_2^*} = \frac{z_1 z_2^*}{|z_2|^2} \\ &= \frac{(x_1 + jy_1)(x_2 - jy_2)}{x_{2^2} + y_{2^2}} && (16) \\ &= \frac{(x_1x_2 + y_1y_2) + j(x_2y_1 - x_1y_2)}{x_{2^2} + y_{2^2}} \end{aligned}$$

$\frac{(-2+3i)}{(6-9i)} = -\frac{1}{3}$

0.3.2 Regeln für Polarkoordinaten

Während Addition und Subtraktion in kartesischen Koordinaten einfach durch Addition bzw. Subtraktion der Real- und Imaginärteile durchgeführt werden, sind Multiplikation und Division in kartesischen Koordinaten unübersichtlich und können viel einfacher in Polarkoordinaten berechnet werden.

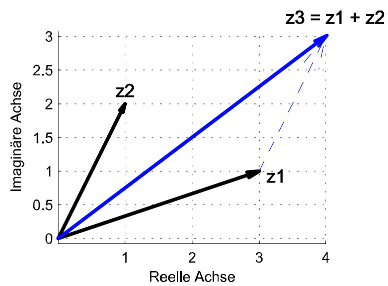

Abbildung 7: Zeigeraddition

Multiplikation

$$z_1 \times z_2 = r_1 e^{j\varphi_1} \times r_2 e^{j\varphi 2} = r_1 r_2 e^{j(\varphi_1 + \varphi 2)} \tag{17}$$

$2e^{j30^\circ} \times 3e^{j60^\circ} = 6e^{j90^\circ} = j6$

Konjugiert komplexe Zahl

$$z_1^* = \left(r_1 e^{j\varphi_1}\right)^* = r_1 e^{-j\varphi_1} \tag{18}$$

$\left(2e^{j30^\circ}\right)^* = 2e^{-j30^\circ}$

Division

$$z_1 \div z_2 = \frac{r_1 e^{j\varphi_1}}{r_2 e^{j\varphi 2}} = \frac{r_1}{r_2} e^{j(\varphi_1 - \varphi 2)} \tag{19}$$

$2e^{j30^\circ} \div 3e^{j60^\circ} = \frac{2}{3} e^{-j30^\circ}$

Multiplikation und Division sind in Polarkoordinaten sehr einfach durchführbar, es müssen lediglich die Beträge multipliziert (dividiert) und die Winkel addiert (subtrahiert) werden. Die Addition und Division in Polarkoordinaten kann nur durch Umwandlung in kartesische Koordinaten, Durchführung von Addition bzw. Subtraktion und Rückumwandlung in Polarkoordinaten durchgeführt werden.

Matlab arbeitet mit komplexen Zahlen, die Rechenoperationen Addition (+), Subtraktion (−), Multiplikation (∗) und Division (/) gelten auch für komplexes Argument. Die Eingabe ist in kartesischer und Polardatstellung möglich, die Ausgabe erfolgt immer kartesisch und muss bei Bedarf umgerechnet werden.

```
z1 = -2.0000 + 3.0000i       3*exp(i*45*pi/180) = 2.1213 + 2.1213i
z2 = 6.0000 - 9.0000i        [phi,r] = cart2pol(6,-9)
z1+z2 = 4.0000 - 6.0000i     r = 10.8167    phi = -0.9828
z1-z2 = -8.0000 + 12.0000i
z1*z2 = 15.0000 + 36.0000i   = 3.6056*exp(2.1588i)*10.8167*exp(-0.9828i)
z1/z2 = -0.3333
```

0.4 Geometrische Betrachtung

Abbildung 7 zeigt die *Addition* der Zeiger $z_1 + z_2 = z_3$. z_1 und z_2 werden wie im Kräfteparallelogramm zum Zeiger z_3 zusammengesetzt.

Die *Subtraktion* von $z_1 - z_2$ ist nichts anderes als $z_1 + (-z_2)$.

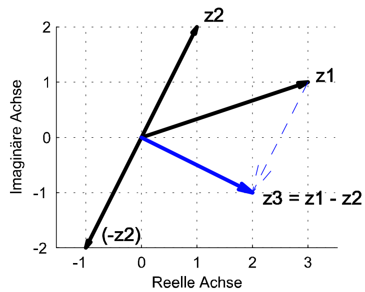

Abbildung 8: Subtraktion von Zeigern

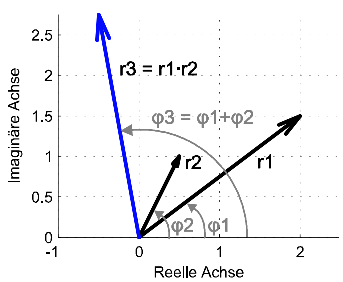

Abbildung 9: Zeigermultiplikation

$(-z_2)$ ist der in die gegengesetzte Richtung zeigende Zeiger z_2. Die Abbildung 8 stellt die Zeigersubtraktion graphisch dar.

Die *Multiplikation* der Zeiger $z_1 z_2$ stellt man am besten über die Polarform dar: $|z_1|e^{j\varphi_1}|z_2|e^{j\varphi_2} = |z_1||z_2|e^{j(\varphi_1+\varphi_2)}$. Abbildung 9 stellt diesen Zusammenhang graphisch dar. Die Multiplikation mit der Zahl $e^{j\varphi_2}$ bedeutet eine Drehung des Zeiger $|z_1|e^{j\varphi_1}$ um den Winkel φ_2. Die Multiplikation einer Zahl mit j entspricht einer Drehung um 90°, da $j = e^{j\pi/2}$.

Auch die *Division* kann am besten über die Polarform dargestellt werden.

$$z_3 = \frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2} e^{j(\varphi_1 - \varphi_2)}$$

Abbildung 10 stellt die Division graphisch dar. Ein interessanter Fall tritt auf, wenn $z_1 = r_1 e^{j\varphi}$ und $z_2 = r_2 e^{j(\varphi+90^\circ)}$ also einen Winkel von 90° einschließen. $z_3 = z_1/z_2$ wird dann $-j(r_1/r_2)$.

Ganzzahlige *Potenzen* eine komplexen Zahl kann man einfach über die Polarform berechnen

$$z^N = \left(re^{j\varphi}\right)^N = r^N e^{jN\varphi}$$

Abbildung 11 zeigt die Potenzen $z^1, z^2, ..., z^{10}$, für die Zahl $z = 0.9e^{j30^\circ}$.

Es fehlt noch die *Wurzel* einer (komplexen) Zahl. Als Beispiel betrachten wir $\sqrt[4]{1}$. Vom Fundamentalsatz der Algebra wissen wir, dass das Polynom $z^4 - 1 = 0$ vier Wurzeln haben muss. Die Lösung 1 finden wir leicht,

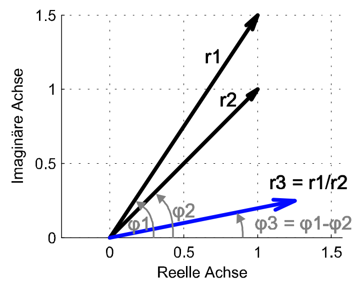

Abbildung 10: Zeigerdivision

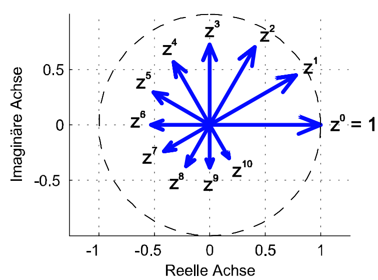

Abbildung 11: Potenzen der komplexen Zahl $0.9e^{j30^\circ}$

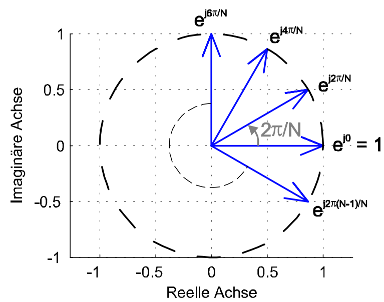

Abbildung 12: Wurzeln von 1

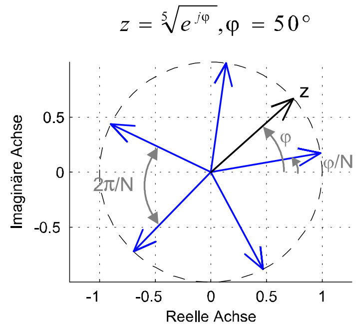

Abbildung 13: Fünfte Wurzel aus $e^{j50°}$

auch die Lösung -1 ist nicht schwer zu bestimmen, etwas Nachdenken ist aber für die weiteren Lösungen $\pm j$ erforderlich. Allgemein gilt die Beziehung:

$$\sqrt[N]{1} = e^{\frac{j2\pi n}{N}} \quad n = 0, 1, 2, ..., N-1$$

Das bedeutet, dass die Wurzeln gleichverteilt auf dem Einheitskreis liegen und dass der Winkel zwischen den Wurzeln $\varphi = 2\pi/N$ beträgt. Abbildung 12 stellt diesen Zusammenhang dar.

Im allgemeinen Fall ist aber nicht $\sqrt[N]{1}$ zu bilden, sondern die Wurzel einer beliebigen komplexen Zahl. Wir finden hier folgenden Zusammenhang:

$$z = \sqrt[N]{re^{j\varphi}} = \sqrt[N]{r}e^{j(\frac{\varphi}{N}+\frac{2\pi n}{N})} \quad n = 0, 1, 2, ..., N-1$$

Abb. 13 zeigt ein Beispiel für eine Wurzel fünfter Ordnung, wobei der Betrag der Zahl, aus der die Wurzel gezogen wird, mit 1 angenommen ist. Die Lösungen liegen daher auf dem Einheitskreis, die "erste" Wurzel liegt bei $e^{j\varphi/N}$, die weiteren Wurzeln sind um den Winkel $2\pi/N$ gedreht. Für eine Zahl z mit Betrag $\neq 1$, wäre der Radius des Kreises auf dem die Wurzeln liegen $\sqrt[N]{|z|}$.

0.5 Achtung Phase

Bei der Darstellung nach Betrag und Winkel treten paar Besonderheiten auf, die zu beachten sind.

- Bei der Berechnung der Winkelfunktionen wird normalerweise das Bogenmaß verwendet. Damit vermeidet man die umständliche Darstellung des Winkels im Gradmaß, die die Zahlenbasis 360 für Grad, 60 für Minuten und Sekunden und 10 für Bruchteile von Sekunden verwendet, z.B. $30°45'48.1234''$. Dafür handelt man sich schwer vorstellbare Bogenwinkel für aus dem Gradmaß gut bekannte Winkel ein, z.B. $0.7854 = \pi/4 = 45°$. Daher wird die Umrechnung oft impizit angeschrieben, z.B. $\sin(\alpha° * \pi/180)$.

- Wenn der Realteil Null ist und der Imaginärteil einen endlichen Wert hat, tritt bei der Berechnung der Phase eine Division durch Null auf, da $\varphi = \arctan \frac{\text{Imaginärteil}}{\text{Realteil}}$, was in der Berechnung entsprechend berücksichtigt werden muss. Wenn die Zahl rein imaginär ist, ist die Phase $\pi/2$ bei positivem Imaginärteil und $-\pi/2$ bei negativem Imaginäteil.

- Der Arcustangens ist nur für $-90° \leq \varphi \leq 90°$ definiert. Für die komplexe Zahl $1 + 1i$ erhalten wir den Winkel $\varphi = \arctan \frac{1}{1} = 0.7854\,[rad] = 45°$. Für die komplexe Zahl $-1 - 1i$ erhalten wir ebenfalls den Winkel $\varphi = \arctan(\frac{-1}{-1}) = \arctan(1) = 0.7854\,[rad] = 45°$, obwohl die korrekte Phase (Zahl liegt im dritten Quadranten) $\varphi = -135°$ beträgt. Dieses Problem tritt immer auf, wenn die komplexe Zahl im zweiten oder dritten Quadranten liegt. Sind Real- und Imaginärteil negativ, dann muss vom berechneten Winkel 180° abgezogen werden, wenn der Realteil negativ ist und der Imaginärteil positiv ist, dann müssen 180° addiert werden. Die MATLAB-Funktion `angle(H)` liefert die Phase vorzeichenrichtig im Bogenmaß.

- Die Phase ist wegen der Periodizität der Sinusfunktion lediglich im Bereich von $0 \leq \varphi \leq 2\pi$ definiert. Wenn sich ein Zeiger um $\varphi + n \cdot 2\pi$ dreht, dann ist die Phase dennoch nur φ. Dieser Sachverhalt führt dazu, das bei Darstellungen des Phasenverlaufs die Phase zwischen $-\pi$ und π liegt, man aber auf Grund des physikalsiceh Zusammenhangs weiß, dass die Phase $\varphi + n \cdot 2\pi$ beträgt. Man wählt daher häufig eine Darstellung, die die Phase streckt (unwrapping) und dadurch die Sprungstellen vermeidet. Abbildung 14 zeigt die Darstellung der Phase zwischen ±180° und die "unwraped" Darstellung.

Beispiel 5 *Als Ergebnis einer Berechnung erhalten wir die komplexen Werte* `H`

```
plot((180/pi)*angle(H))
xlabel('-180° <= Phase <= 180°')
subplot(1,2,2)
plot(unwrap((180/pi)*angle(H)))
xlabel('Phase "unwraped"')
```

- π und $-\pi$ stellen dieselbe Phase dar.Durch Rundungsfehler in der Rechnung können Sprünge in der Phase auftreten, die zu Phasensprüngen zwischen benachbarten Punkten führen können.

- Wenn die Amplitude einer komplexen Zahl Null (oder sehr klein) ist, hat die Phase keine Bedeutung und kann sinnlose Werte annehmen.

- Der Betrag ist definionsgemäß eine positive Zahl. Dennoch läßt man gelegentlich einen "negativen" Betrag zu, um die Darstellung zu vereinfachen. Abbildung 15 zeigt den Zusammenhang am Beispiel der Funktion $\sin(x)/x$.

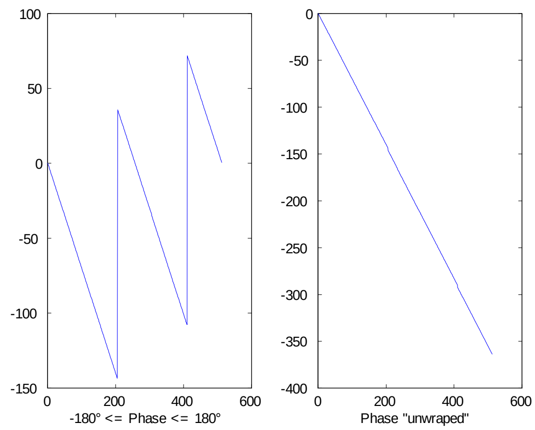

Abbildung 14: Phasendarstellung

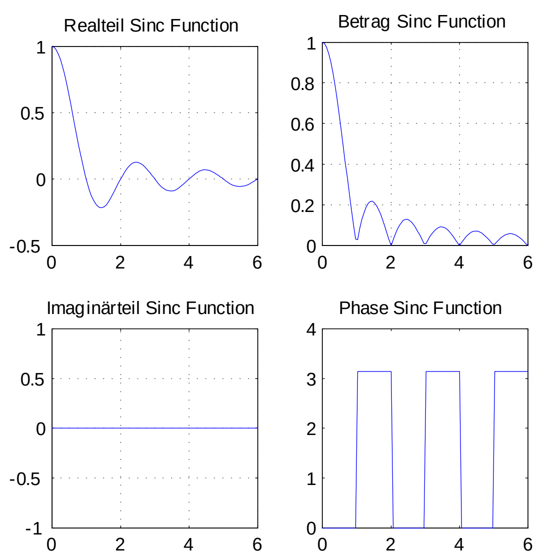

Abbildung 15: "Negativer" Betrag erzeugt $Phase = 0$

0.6 Zusammenfassung

Mit Hilfe der komplexen Darstellung lässt sich die – für Elektrotechnik und Signalverarbeitung sehr wichtige – Sinus(Kosinus)funktion in eine kompakte Form bringen, mit der man wesentlich besser rechnen kann als mit der reellen Darstellung. Durch geometische Interpretation der komplexen Zahlen gelangt man zur Zeigerdarstellung, mit der sich die Operationen mit komplexen Zahlen anschaulich erläutern lassen.

Komplexe Zahlen können in kartesischer oder Polarform angeschrieben werden. Je nach Rechnung ist die eine oder die andere Form zweckmäßiger, im Zuge von umfangreicheren Berechnungen ist es daher häufig nötig zwischen den Koordinatensystemen zu wechseln. Matlab kennt komplexe Zahlen und stellt Routinen zur Durchführung der Berechnung und Darstellung komplexer Zahlen zur Verfügung.