

Kapitel 1

IIR-Filter

In diesem Kapitel werden wir eine weitere Klasse von diskreten Filtern kennen lernen, die **Infinite Impulse Response** Filter.

1.1 Vom FIR- zum IIR-Filter

FIR Filter verwenden zur Berechnung des Ausgangswertes $y[n]$ nur Werte des Eingangssignals $x[n]$.

$$y[n] = \sum_{k=0}^M b_k x[n-k]$$

Beim Rekursivfilter werden aber auch Werte des Ausgangssignals zur Berechnung herangezogen, wie das einfache Beispiel in Abbildung (1.1) zeigt.

Wie man sieht, besteht das Filter in Abbildung 1.1 aus einem FIR-Filter erster Ordnung und aus einem nachgeschalteten Rückkoppelungsteil. Die beschreibende Gleichung des Filters der Abbildung (1.1) lautet

$$y[n] = b_0 x[n] + b_1 x[n-1] + a_1 y[n-1] \quad (1.1)$$

IIR-Filter verwenden (im Unterschied zu FIR-Filtern) auch Werte der **Ausgangsgröße**, um den nächsten Ausgangswert zu berechnen.

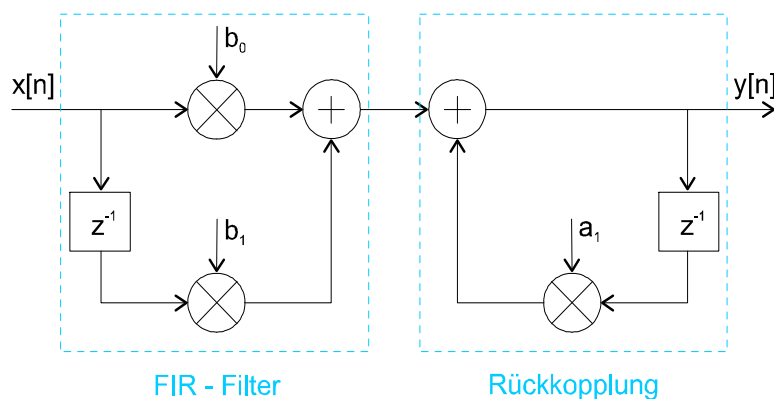


Abbildung 1.1: Blockdiagramm IIR-Filter

In Gleichung (1.1) tritt neben $y[n]$ auch die (zeitverzögerte) Ausgangsgröße $y[n-1]$ auf, eine derartige Gleichung nennt man Differenzengleichung. Im allgemeinen Fall lautet die Differenzengleichung für ein IIR-Filter

$$y[n] = \underbrace{\sum_{l=1}^N a_l y[n-l]}_{\text{Ausgangswerte}} + \underbrace{\sum_{k=0}^M b_k x[n-k]}_{\text{Eingangswerte}} \quad (1.2)$$

Die **Ordnung** von IIR-Filtern ist gleich der **Anzahl der Rückführungsterme**.

Bei IIR-Filtern bezeichnet man N – die Zahl der Rückführungsterme – als Ordnung des Systems.

1.2 Zeitverhalten von IIR-Filtern

Das Zeitverhalten von IIR-Filtern untersuchen wir zunächst an einem einfachen Beispiel eines Systems erster Ordnung und mit dem Rückführungskoeffizienten $a_1 = 0.8$

$$y[n] = 0.8y[n-1] + x[n] \quad (1.3)$$

An unser Beispielsystem legen wir das Eingangssignal

$$x[n] = 2\delta[n] - 3\delta[n-1] + 2\delta[n-3] \quad (1.4)$$

und berechnen das Ausgangssignal durch Einsetzen in die Differenzengleichung. Für $n = 0$ erhalten wir

$$y[0] = 0.8y[0-1] + x[0] \quad (1.5)$$

Es wird angenommen, dass alle Werte des Eingangs- und Ausgangssignals zu den Zeitpunkten $n < 0$ gleich Null sind.

Der Wert $y[-1]$ ist zunächst nicht definiert. Wir nehmen an, dass das System vor Anlegen des Eingangssignals in Ruhelage war und dass alle Verzögerungselemente (Speicher) mit dem Wert Null geladen sind. Dann erhalten wir $y[-1] = 0$.

Bemerkung 1 *Im weiteren Verlauf werden wir generell annehmen, dass das Eingangssignal zum Zeitpunkt $n_0 = 0$ »eingeschaltet« wird und dass die Systeme vor dem Anfangszeitpunkt $n_0 = 0$ in Ruhelage sind, dass also folgende Anfangsbedingungen gelten:*

$$\begin{aligned} x[n] &= 0 \quad \text{für } n < 0 \\ y[n] &= 0 \quad \text{für } n < 0 \end{aligned} \quad (1.6)$$

Unter diesen Annahmen erhalten wir für unser Beispiel

$$\begin{aligned} y[0] &= 0.8y[-1] + x[0] = 0.8 \cdot 0 + 2 = 2 \\ y[1] &= 0.8y[0] + x[1] = 0.8 \cdot 2 - 3 = -1.4 \\ y[2] &= 0.8y[1] + x[2] = 0.8 \cdot (-1.4) + 0 = -1.12 \\ y[3] &= 0.8y[2] + x[3] = 0.8 \cdot (-1.12) + 2 = 1.104 \end{aligned} \quad (1.7)$$

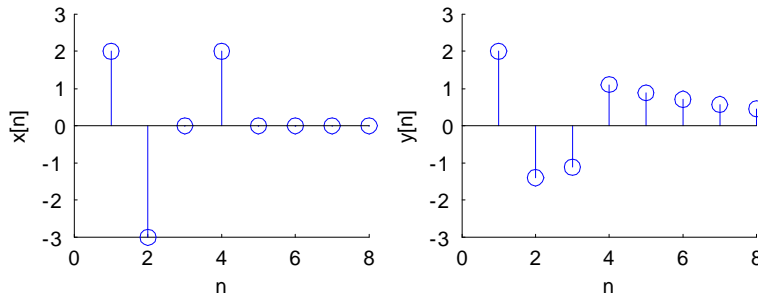


Abbildung 1.2: Eingangs- & Ausgangssignal IIR-Filter

Ab diesem Zeitpunkt ist das Eingangssignal Null.

$$\begin{aligned} y[4] &= 0.8y[3] + x[4] = 0.8 \cdot 1.104 + 0 = 0.883 \\ y[5] &= 0.8y[4] + x[5] = 0.8 \cdot 0.883 + 0 = 0.707 \\ &\vdots = \vdots \end{aligned}$$

Abbildung 1.2 stellt den Zusammenhang zwischen Eingangs- und Ausgangssignal dar¹.

Aus Gleichung (1.7) können wir erkennen, dass das Ausgangssignal für $n > 3$ nach der Differenzengleichung $y[n] = 0.8y[n-1]$ abklingt, für die wir folgende Lösung finden

$$y[n] = y[3] \cdot (0.8)^{n-3} \quad \text{für } n \geq 3 \quad (1.8)$$

Aus Gleichung (1.8) sehen wir, dass $y[n]$ erst für $n \rightarrow \infty$ gegen Null geht, dass die Antwort dieses Filters also unendlich lang dauert, daher auch der Name *infinite impulse response*.

1.3 Eigenschaften von IIR-Filtern

1.3.1 Linearität und Zeitinvarianz

Man kann zeigen, dass für ein IIR-System nach Gleichung (1.2), wenn die Anfangsbedingungen nach Gleichung (1.6) erfüllt sind, der Überlagerungssatz gilt und derartige Systeme daher linear und zeitinvariant sind. **IIR-Filter sind linear und zeitinvariant.**

1.3.2 Impulsantwort

Bei den FIR-Filtern haben wir gesehen, dass die Impulsantwort ein Filter eindeutig beschreibt. Beliebige Eingangssignale können durch Überlagerung von gewichteten, zeitversetzten Impulsen dargestellt werden, das Ausgangssignal ist aus gewichteten und zeitversetzten Impulsantworten zusammengesetzt.

Auch IIR-Filter sind lineare, zeitinvariante Systeme, es gilt daher der Über-

¹In der Abbildung sind beide Signale wegen der besseren Lesbarkeit um 1 nach rechts verschoben.

Das **Ausgangssignal** kann auch bei IIR-Filtern durch die **Faltung** des **Eingangssignals** mit der **Impulsantwort** berechnet werden.

lagerungssatz und die Berechnung der Antwort eines Systems auf eine beliebige Eingangsfolge erfolgt mit Hilfe der Faltung

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]h[n-k] \quad (1.9)$$

Da sowohl das Eingangssignal als auch die Impulsantwort zeitlich nicht begrenzt sind, muss die Faltungssumme im Allgemeinen über den gesamten Zeitraum von $-\infty$ bis ∞ berechnet werden.

Für ein System erster Ordnung

$$y[n] = a_1 y[n-1] + b_0 x[n] \quad (1.10)$$

ist die Differenzgleichung der Impulsantwort

$$h[n] = a_1 h[n-1] + b_0 \delta_0[n] \quad (1.11)$$

Wir müssen eine Lösung für Gleichung (1.11) finden, wobei das Problem auftritt, dass die Lösung – also die Folge $h[n]$ – in Gleichung (1.11) in der Form $h[n]$ und in der Form $h[n-1]$ steckt. Zum Unterschied von den FIR-Filtern kann man die Lösung bei IIR-Filtern also nicht unmittelbar anschreiben.²

Für die **direkte Berechnung der Impulsantwort** eines IIR-Filters muss eine lineare **Differenzgleichung** mit konstanten Koeffizienten gelöst werden.

Wie bei Differentialgleichungen müssen wir auch bei Differenzgleichungen den Lösungsansatz »erraten«. Die Betrachtung von (1.8) legt folgenden Lösungsansatz nahe

$$h[n] = \begin{cases} b_0(a_1)^n & \text{für } n \geq 0 \\ 0 & \text{für } n < 0 \end{cases} \quad (1.12)$$

Den Vorgang des Einschaltens stellen wir durch die Sprungfunktion dar und können daher schreiben

$$\delta_{-1}[n] = \begin{cases} 1 & \text{für } n \geq 0 \\ 0 & \text{für } n < 0 \end{cases} \quad (1.13)$$

$$h[n] = b_0(a_1)^n \delta_{-1}[n] \quad (1.14)$$

Zum Beweis der Korrektheit der Lösung setzen wir in die Differenzgleichung (1.11) ein. Wir zeigen die Gültigkeit zunächst bei $n = 0$ und dann für $n > 0$ für den Lösungsansatz und die DGL

$$\begin{aligned} \text{(Lösung) } n = 0 : h[0] &= b_0(a_1)^0 = b_0 && \checkmark \\ \text{(DGL) } n = 0 : h[n] &= a_1 h[n-1] + b_0 \delta_0[n] = a_1(0) + b_0 \delta_0[0] = b_0 && \checkmark \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{(Lösung) } n > 0 : h[n] &= b_0(a_1)^n && \checkmark \\ \text{(DGL) } n > 0 : h[n] &= a_1 h[n-1] + (0) \\ n > 0 : b_0(a_1)^n &= a_1 b_0(a_1)^{n-1} = b_0(a_1)^n && \checkmark \end{aligned}$$

²Bei zeit-kontinuierlichen Systemen erster Ordnung tritt anstelle der Differenzgleichung eine Differentialgleichung auf. Die gesuchte Zeitfunktion $h(t)$ tritt in einer Differentialgleichung erster Ordnung in der Form von $h(t)$ und $\dot{h}(t) = d[h(t)]/dt$ auf.

Die Lösung (1.12) erfüllt die Differenzgleichung (1.11)

Das Lösen von Differenzgleichungen durch »Erraten« ist mühselig und verlangt viel Erfahrung. Wir werden in einem späteren Abschnitt ein direktes Verfahren mit Hilfe der z -Transformation und Partialbruchzerlegung kennenlernen.

1.3.3 Sprungantwort

Die Berechnung der Systemantwort auf ein beliebiges Eingangssignal kann wie beim FIR-Filter durch Lösen der Differenzgleichung oder mit Hilfe der Faltung erfolgen. Die Lösung über die Faltung ist bei IIR-Filtern wegen der unendlich langen Impulsantwort in der Regel schwierig oder unmöglich, außer in Sonderfällen, wo es eine geschlossene Lösung gibt. Ein derartiges Beispiel liefert die Sprungantwort eines IIR-Filters erster Ordnung .

Ein IIR-Filter ist auch durch die **Sprungantwort** vollständig beschrieben.

$$y[n] = a_1 y[n-1] + b_0 x[n] \quad (1.15)$$

$$\delta_{-1}[n] = \begin{cases} 1 & \text{für } n \geq 0 \\ 0 & \text{für } n < 0 \end{cases} \quad (1.16)$$

Zunächst berechnen wir die Sprungantwort durch Einsetzen in die Differenzgleichung und punktweises Berechnen des Ausgangssignals

$$\begin{array}{lll} n & x[n] & y[n] \\ 0 & 1 & b_0 \\ 1 & 1 & b_0 + b_0(a_1) \\ 2 & 1 & b_0 + b_0(a_1) + b_0(a_1)^2 \\ 3 & 1 & b_0(1 + a_1 + a_1^2 + a_1^3) \\ 4 & 1 & b_0(1 + a_1 + a_1^2 + a_1^3 + a_1^4) \\ \vdots & 1 & \vdots \end{array}$$

Das Entwicklungsgesetz für $y[n]$ lässt sich leicht erkennen

$$y[n] = b_0 (1 + a_1 + a_1^2 + a_1^3 + a_1^4 + \dots + a_1^n) = b_0 \sum_{k=0}^n a_1^k \quad (1.17)$$

Für die Summe der geometrischen Reihe $\sum_{k=0}^n a_1^k$ finden wir in einer Formelsammlung

$$\sum_{k=0}^n q^k = \begin{cases} n+1 & \text{für } q = 1 \\ \frac{q^{n+1}-1}{q-1} & \text{sonst} \end{cases} \quad (1.18)$$

und erhalten dann

$$y[n] = b_0 \frac{1 - a_1^{n+1}}{1 - a_1} \quad \text{für } n \geq 0, \quad \text{wenn } a_1 \neq 1 \quad (1.19)$$

Bei der Untersuchung von $y[n]$ müssen wir drei Fälle unterscheiden:

1. Wenn $|a_1| > 1$, dann dominiert der Zählerausdruck a_1^{n+1} und $y[n]$ steigt über alle Grenzen. In diesem Fall spricht man von einem unstablen System.

Die Sprungantwort eines IIR-Filters erster Ordnung kann noch durch »Erraten und Überprüfen« berechnet werden.

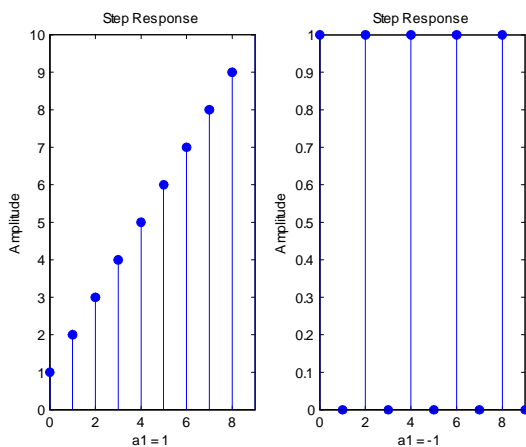
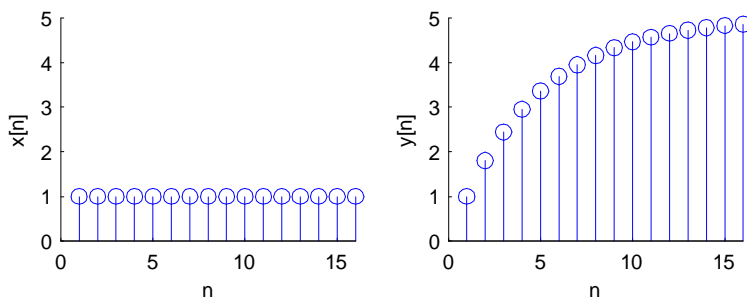
Abbildung 1.3: Sprungantwort für $a_1 = 1$ und $a_1 = -1$ 

Abbildung 1.4: Sprungantwort IIR-Filter

2. Wenn $|a_1| < 1$, dann geht der Ausdruck a_1^{n+1} gegen Null für $n \rightarrow \infty$, man spricht von einem stabilen System. Wenn $n \rightarrow \infty$ dann wird

$$\lim_{n \rightarrow \infty} y[n] = \lim_{n \rightarrow \infty} b_0 \frac{1 - a_1^{n+1}}{1 - a_1} = \frac{b_0}{1 - a_1} \quad (1.20)$$

Die **Rückführungskoeffizienten** a_k sind für die **Stabilität** von IIR-Filtern ausschlaggebend.

3. Wenn $|a_1| = 1$ ist eine weitere Untersuchung erforderlich:
 Für $a_1 = 1$ erhalten wir $y[n] = (n+1)b_0$ und $y[n]$ wächst mit $n \rightarrow \infty$ über alle Grenzen.
 Für $a_1 = -1$ wechselt $y[n]$ zwischen b_0 und Null und zwar $y[n] = b_0$ für gerades n , $y[n] = 0$ für ungerades n .

Abbildung 1.3 zeigt die Sprungantworten für diese beiden Fälle.

Mehr über Stabilität werden wir bei der Untersuchung von IIR-Filtern im z -Bereich erfahren.

Für das IIR-Filter $y[n] = 0.8y[n-1] + x[n]$ ist die Sprungantwort in Abbildung 1.4 dargestellt.

Nach der Berechnung der Sprungantwort durch Einsetzen in die Differenzgleichung wollen wir die Berechnung mit Hilfe der Faltung ausführen.

$$y[n] = x[n] * h[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]h[n-k] \quad (1.21)$$

Da bei IIR-Filtern sowohl Eingangssignal als auch Impulsantwort unendliche Dauer haben, ist die Berechnung der Faltung in der Regel nicht einfach. In unserem Beispiel kann aber eine geschlossene Lösung gefunden werden.

Wir falten das Eingangssignal $\delta_{-1}[n]$ mit der Impulsantwort $h[n] = b_0(a_1)^n\delta_{-1}[n]$ und erhalten

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta_{-1}[k]b_0(a_1)^{n-k}\delta_{-1}[n-k] \quad (1.22)$$

Da $\delta_{-1}[k] = 0$ für $k < 0$ und $\delta_{-1}[n-k] = 0$ für $n-k < 0$ (bzw. $n < k$) muss die Faltung nicht von $-\infty$ bis ∞ durchgeführt werden sondern nur von Null bis n und wir erhalten

$$y[n] = \begin{cases} 0 & \text{für } n < 0 \\ \sum_{k=0}^n b_0(a_1)^{n-k} & \text{für } n \geq 0 \end{cases} \quad (1.23)$$

Wir formen um

$$y[n] = \sum_{k=0}^n b_0(a_1)^{n-k} = b_0(a_1)^n \sum_{k=0}^n (a_1)^{-k} \quad (1.24)$$

Unter Verwendung der Reihensumme aus Gleichung (1.18) wird daraus

$$y[n] = b_0(a_1)^n \frac{1 - \left(\frac{1}{a_1}\right)^{n+1}}{1 - \left(\frac{1}{a_1}\right)} = b_0 \frac{1 - a_1^{n+1}}{1 - a_1} \quad (1.25)$$

und damit dasselbe Ergebnis wie in Gleichung (1.19).

1.3.4 Systemfunktion von IIR-Filtern

Mit Hilfe der z -Transformation haben wir die Systemfunktion für FIR-Filter eingeführt und gesehen, dass der Faltung im Zeitbereich die Multiplikation im z -Bereich entspricht.

$$y[n] = h[n] * x[n] \quad \Leftrightarrow \quad Y(z) = H(z)X(z) \quad (1.26)$$

Dieser Zusammenhang gilt auch für die IIR-Filter. Zum Unterschied von den FIR-Filtern, bei denen die Systemfunktion immer ein Polynom in z^{-1} ist (z.B. $H(z) = 1 + 2z^{-1} + 2z^{-2} + z^{-3}$), ist die Systemfunktion von IIR-Filtern immer eine gebrochen rationale Funktion, also eine Funktion, die aus Zähler- und Nennerpolynom besteht. Als Beispiel nehmen wir wieder ein IIR-Filter 1.Ordnung

$$y[n] = a_1y[n-1] + b_0x[n] + b_1x[n-1] \quad (1.27)$$

Durch z -Transformation wird aus der Differenzgleichung (1.27)

$$Y(z) = a_1z^{-1}Y(z) + b_0X(z) + b_1z^{-1}X(z) \quad (1.28)$$

Bei einem IIR-Filter (erster Ordnung) kann die Sprungantwort auch durch Faltung berechnet werden.

Die **Systemfunktion** von IIR-Filtern ist immer eine **gebrochen rationale Funktion**, die aus Zähler- und Nennerpolynom besteht.

Nach Umformung erhalten wir

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{b_0 + b_1 z^{-1}}{1 - a_1 z^{-1}} = \frac{B(z)}{A(z)} \quad (1.29)$$

Für ein allgemeines IIR-Filter erhalten wir

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{b_0 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2} + \dots + b_m z^{-m}}{1 - a_1 z^{-1} - a_2 z^{-2} - \dots - a_n z^{-n}} = \frac{B(z)}{A(z)} \quad (1.30)$$

Im Zähler stehen die Vorwärtskopplungsterme (FIR-Eingangsteil), im Nenner Eins plus die negativen Rückkopplungsterme.

1.3.5 Unendliche Folgen im z -Bereich

Wie wir gesehen haben, ist die Impulsantwort von IIR-Filtern »infinite«, es treten also unendliche Folgen auf, die auch im z -Bereich dargestellt werden müssen. Wir wollen zunächst die z -Transformation der sehr wichtigen Folge $h[n] = a^n \delta_{-1}[n]$ untersuchen.

$$H(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a^n z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} (az^{-1})^n \quad (1.31)$$

Gleichung (1.31) ist eine geometrische Reihe. In einer Formelsammlung finden wir

$$\sum_{k=0}^{\infty} x^k = \frac{1}{1-x} \quad \text{für } |x| < 1 \quad (1.32)$$

Die z -Transformierte von $a^n \delta_{-1}[n]$ ist $\frac{1}{1-az^{-1}}$ und daraus

$$H(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a^n z^{-n} = \frac{1}{1-az^{-1}} \quad |a| < 1 \quad (1.33)$$

Wir haben ein wichtiges Transformationspaar gefunden

$$\begin{aligned} \text{Zeitbereich} &\Leftrightarrow z\text{-Bereich} \\ a^n \delta_{-1}[n] &\Leftrightarrow \frac{1}{1-az^{-1}} \end{aligned} \quad (1.34)$$

Abbildung 1.5 zeigt den Verlauf von $a^n \delta_{-1}[n]$ für $a = 0.7$.

1.4 Realisierung von IIR-Filtern

1.4.1 Erste Direktform

Die erste **Direktform** eines IIR-Filters ist die **intuitive Realisierung** des Filters nach der **Differenzgleichung**. Die erste Direktform lässt sich unmittelbar aus der Differenzgleichung ableiten. Abbildung 1.6 zeigt ein Blockdiagramm für ein IIR-Filter erster Ordnung.

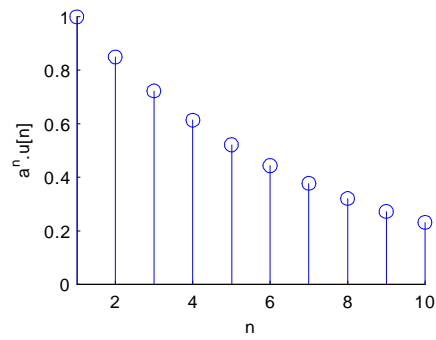


Abbildung 1.5: $y[n] = 0.7^n \delta_{-1}[n]$

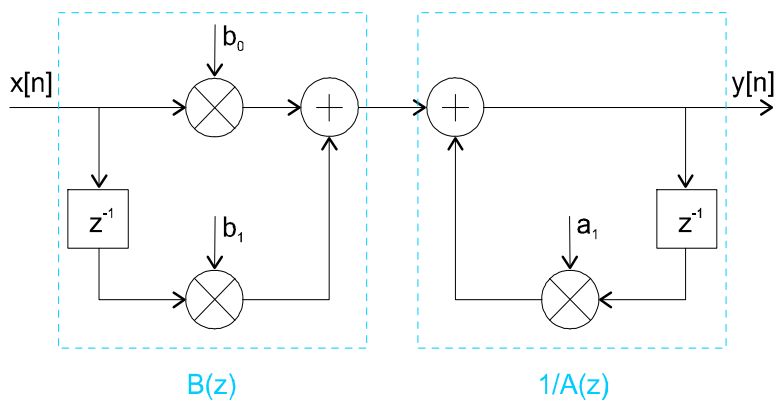


Abbildung 1.6: Blockdiagramm IIR-Filter

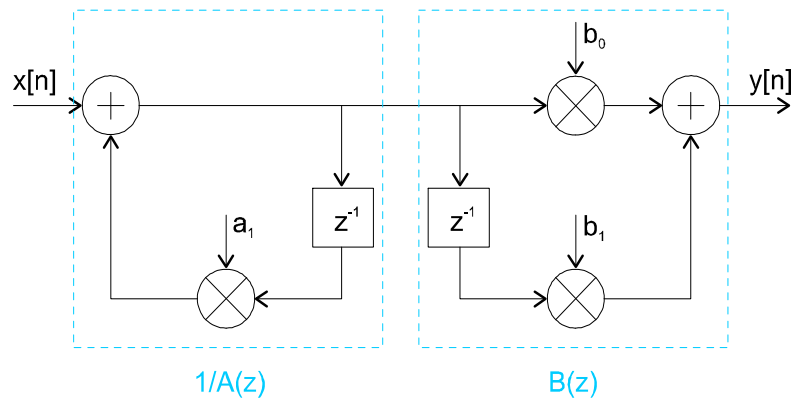


Abbildung 1.7: IIR-Filter 2. Direktform

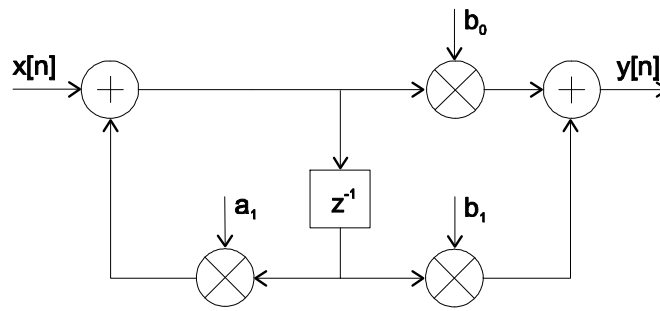


Abbildung 1.8: IIR-Filter 2. Direktform

1.4.2 Zweite Direktform

Wir wissen, dass bei kaskadierten LTI-Systemen die Reihenfolge der Kaskadierung ohne Einfluss auf die Systemfunktion ist.

$$H(z) = B(z) \cdot \frac{1}{A(z)} = \frac{1}{A(z)} \cdot B(z) \quad (1.35)$$

Damit ergibt sich das Blockdiagramm für ein IIR-Filter erster Ordnung in zweiter Direktform nach Abbildung 1.7.

Bei der **zweiten Direktform** können **Verzögerungsglieder eingespart** werden.

Wie man aus Abbildung 1.7 leicht erkennen kann, führen die beiden Verzögerungsglieder identische Operationen aus, ein Verzögerungsglied kann also eingespart werden, wie in Abbildung 1.8 gezeigt ist.

Zur Beschreibung von Systemstrukturen und Algorithmen verwendet man wegen ihrer kompakten Form häufig Signalfussgraphen. Abbildung 1.9 zeigt den Signalfussgraphen eines allgemeinen IIR-Filter der zweiten Direktform.

1.4.3 Transponierte Form

Blockdiagramm 1.10 zeigt die transponierte Form eines IIR-Filter erster Ordnung.

Die transponierte Form erhält man aus der Direktform durch folgende topologische Umwandlung:

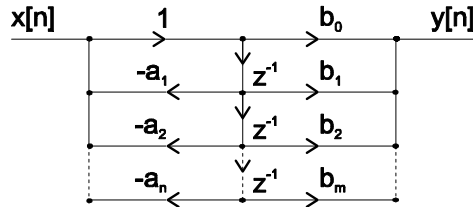


Abbildung 1.9: Signalflussgraph IIR-Filter 2. Direktform

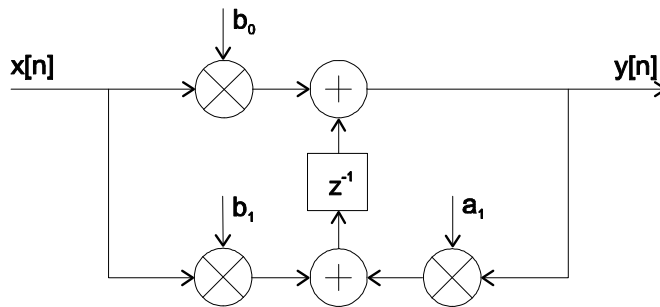


Abbildung 1.10: Transponierte Form

1. Die Multiplizierer bleiben unverändert.
2. Alle Signalpfeile kehren ihre Richtung um.
3. Aus den Verzweigungspunkten werden Addierer, aus den Addierern Verzweigungspunkte.
4. Eingang wird Ausgang, Ausgang wird Eingang.

Eine weitere Realisierungsform werden wir im Kapitel über die Partialbruchzerlegung kennenlernen.

Die gezeigten Realisierungen brauchen die gleiche Anzahl von Additionen und Multiplikationen und produzieren dasselbe Ausgangssignal. Das gilt allerdings nur dann, wenn wir eine präzise Arithmetik voraussetzen. Bei der Implementierung in Hardware oder Software treten auf Grund der endlichen Genauigkeit bei der Zahlendarstellung Rundungsfehler auf, was dazu führt, dass jede Implementierung sich geringfügig anders verhält. Die Implementierung von digitalen Filtern bedarf der genauen Untersuchung der Rundungsfehler und Zahlenüberläufe.

Die **verschiedenen Realisierungsformen** produzieren das **gleiche Ergebnis** nur unter der Annahme, dass **numerische Fehler vernachlässigt** werden können.

1.5 Pole und Nullstellen

Die Systemfunktion eines allgemeinen IIR-Filters lautet

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{b_0 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2} + \dots + b_m z^{-m}}{1 - a_1 z^{-1} - a_2 z^{-2} - \dots - a_n z^{-n}} = \frac{B(z)}{A(z)} \quad (1.36)$$

Ein IIR-Filter wird durch die Lage der **Pole und Nullstellen** bis auf einen konstanten Faktor **eindeutig beschrieben**.

Die Lage der Wurzeln des Zählerpolynoms $B(z)$ (Nullstellen von $H(z)$) und des Nennerpolynoms $A(z)$ (Polstellen von $H(z)$) erlaubt Aussagen über die Eigenschaften des Filters und hat großen Einfluß auf das Filterverhalten.

Für ein IIR-Filter erster Ordnung finden wir folgende Pole und Nullstellen

$$H(z) = \frac{b_0 + b_1 z^{-1}}{1 - a_1 z^{-1}} = \frac{b_0 z + b_1}{z - a_1} \quad (1.37)$$

$$b_0 z + b_1 = 0 \quad \Rightarrow \quad z_0 = -\frac{b_1}{b_0} \quad (1.38)$$

$$z - a_1 = 0 \quad \Rightarrow \quad z_\infty = a_1 \quad (1.39)$$

$$H(z)|_{z=-b_1/b_0} = 0 \text{ (Nullstelle)} \quad H(z)|_{z=a_1} \rightarrow \infty \text{ (Polstelle)} \quad (1.40)$$

1.5.1 Stabilität und Lage der Pole

Wir betrachten ein IIR-Filter erster Ordnung mit folgender Systemfunktion

$$H(z) = \frac{b_0 + b_1 z^{-1}}{1 - a_1 z^{-1}} \quad (1.41)$$

Die Impulsantwort dieses Systems ist

$$h[n] = b_0(a_1)^n \delta_{-1}[n] + b_1(a_1)^{n-1} \delta_{-1}[n-1] = \begin{cases} 0 & \text{für } n < 0 \\ b_0 & \text{für } n = 0 \\ (b_0 + b_1/a_1)a_1^n & \text{für } n \geq 1 \end{cases} \quad (1.42)$$

Ein **IIR-Filter** ist genau dann **stabil**, wenn sich alle **Pole** in der komplexen Ebene **innerhalb des Einheitskreises** befinden.

Aus Gleichung (1.42) sehen wir, dass $h[n]$ abklingt, wenn $|a_1| < 1$. Der Pol der Systemfunktion $H(z)$ liegt bei $z = a_1$. Die Bedingung $|a_1| < 1$ bedeutet im z -Bereich, dass der Pol innerhalb des Einheitskreises in der komplexen Ebene liegt. Abbildung 1.11 zeigt die Impulsantwort für ein stabiles und ein instabiles System.

Bemerkung 2 Man kann die obige Betrachtung verallgemeinern und sagen, dass ein LTI-System, das die Anfangsbedingungen aus Gleichung (1.6) erfüllt und dessen Pole innerhalb des Einheitskreises der z -Ebene liegen, immer stabil ist.

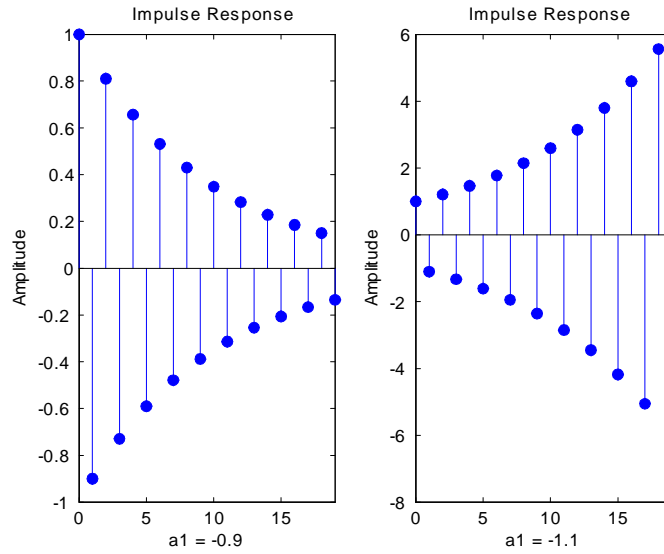
1.6 Frequenzgang von IIR-Filtern

Der Frequenzgang wird aus der Systemfunktion ermittelt, indem $z = e^{j\hat{\omega}}$ gesetzt wird.

Der Frequenzgang beschreibt die Antwort eines Systems auf die Eingangsfolge $x[n] = e^{j\hat{\omega}n}$. Wenn die Systemfunktion eines Filters gegeben ist, dann kann der Frequenzgang daraus ermittelt werden, indem man $z = e^{j\hat{\omega}}$ setzt.

$$H(\hat{\omega}) = H(z)|_{z=e^{j\hat{\omega}}} \quad (1.43)$$

Für ein IIR-Filter erster Ordnung erhalten wir

Abbildung 1.11: Stabiles $a_1 = -0.9$ und unstabiles $a_1 = -1.1$ Verhalten

$$H(z) = \left(\frac{b_0 + b_1 z^{-1}}{1 - a_1 z^{-1}} \right) \Big|_{z=e^{j\hat{\omega}}} \Rightarrow H(e^{j\hat{\omega}}) = \frac{b_0 + b_1 e^{-j\hat{\omega}}}{1 - a_1 e^{-j\hat{\omega}}} \quad (1.44)$$

Der Frequenzgang (1.44) ist eine komplexwertige Funktion, die in der Regel in Betrag und Phase dargestellt wird. Den Betrag eines IIR-Filter erster Ordnung erhalten wir aus

$$|H(e^{j\hat{\omega}})|^2 = H(e^{j\hat{\omega}})H^*(e^{j\hat{\omega}}) = \quad (1.45)$$

$$= \frac{|b_0|^2 + |b_1|^2 + 2b_0 b_1 \cos \hat{\omega}}{1 + |a_1|^2 - 2a_1 \cos \hat{\omega}} \quad (1.46)$$

Für die Phase erhalten wir

$$\varphi(\hat{\omega}) = \arctan \frac{-b_1 \sin \hat{\omega}}{b_0 + b_1 \cos \hat{\omega}} - \arctan \frac{a_1 \sin \hat{\omega}}{1 - a_1 \cos \hat{\omega}} \quad (1.47)$$

Weder der Ausdruck für den Betrag, noch für die Phase sind besonders aussagekräftig und können bestenfalls als Ausgangspunkt für die Berechnung der graphischen Darstellung genommen werden.

Eine andere Möglichkeit besteht darin, mit Hilfe der Pole und Nullstellen den ungefähren Verlauf des Frequenzgangs zu skizzieren. Zur Erläuterung der Vorgehensweise gehen wir von einem einfachen IIR-Filter mit zwei Polen und zwei Nullstellen aus.

$$H(z) = \frac{(z - z_1)(z - z_2)}{(z - p_1)(z - p_2)} \quad (1.48)$$

$$|H(e^{j\hat{\omega}})| = \frac{|e^{j\hat{\omega}} - z_1| |e^{j\hat{\omega}} - z_2|}{|e^{j\hat{\omega}} - p_1| |e^{j\hat{\omega}} - p_2|} \quad (1.49)$$

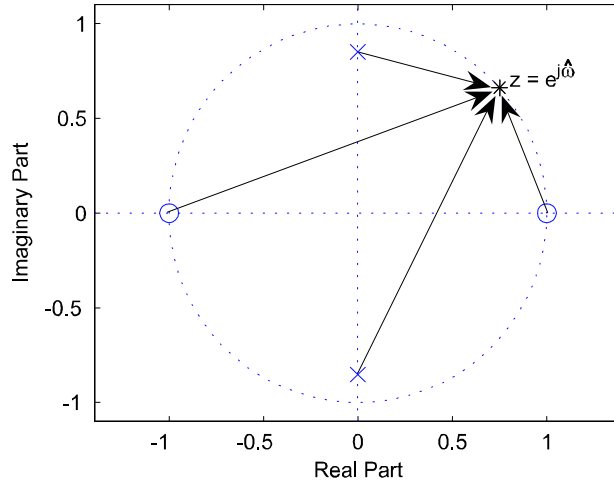


Abbildung 1.12: Grafische Ermittlung des Frequenzgangs

Die Terme $|e^{j\omega} - z_i|$ sind Längen der Zeiger von den Nullstellen z_i zum Punkt $e^{j\omega}$, der auf dem Einheitskreis liegt, die Terme $|e^{j\omega} - p_i|$ sind Längen der Zeiger von den Polstellen p_i zum Punkt $e^{j\omega}$. Abbildung 1.12 zeigt den Zusammenhang.

Der Betrag des Frequenzgangs $|H(e^{j\omega})|$ ist das Produkt der Längen der Zeiger von den Nullstellen zum Punkt $e^{j\omega}$, dividiert durch das Produkt der Längen der Zeiger von den Polstellen zum Punkt $e^{j\omega}$. Unter Verwendung dieser Beziehung kann man den Betrag des Frequenzgangs punktweise ermitteln.

1.7 3D-Darstellung der Systemfunktion

Der **Betrag der Systemfunktion** kann als **Fläche über der komplexen Zahlenebene** (der z -Ebene) dargestellt werden.

Eine für Verständniszwecke anschauliche Darstellung liefert die 3D-Grafik des Betrags der Systemfunktion.

Abbildung 1.13 zeigt den 3D-Plot des Betrags der Systemfunktion eines IIR-Filters mit drei Pol- und drei Nullstellen. Der Betrag ist logarithmisch dargestellt, um die Nullstellen besser erkennen zu können.

Das zu Abbildung 1.13 gehörende Pol-/Nullstellendiagramm ist in Abbildung 1.14 gezeigt.

Der **Frequenzgang** befindet sich **über dem Einheitskreis** in der z -Ebene.

Der Frequenzgang des Filters] (in linearem Maßstab) der Abbildung 1.13 ist in Abbildung 1.15 gezeigt. (Da Nullstellen auf dem Einheitskreis liegen, muss die Übertragungsfunktion für die zugehörigen Frequenzen Null sein, wie man auch im Frequenzgang bei 0.5 und 1 sehen kann. In der logarithmischen Darstellung in Abbildung 1.13 wird der Wert bei diesen Frequenzen $-\infty$, da $\log(0) = -\infty$.)

Die Sprungantwort dieses Filters zeigt Abbildung 1.16.

1.8 Die inverse z -Transformation

Wir fassen unser Wissen über die z -Transformation zusammen

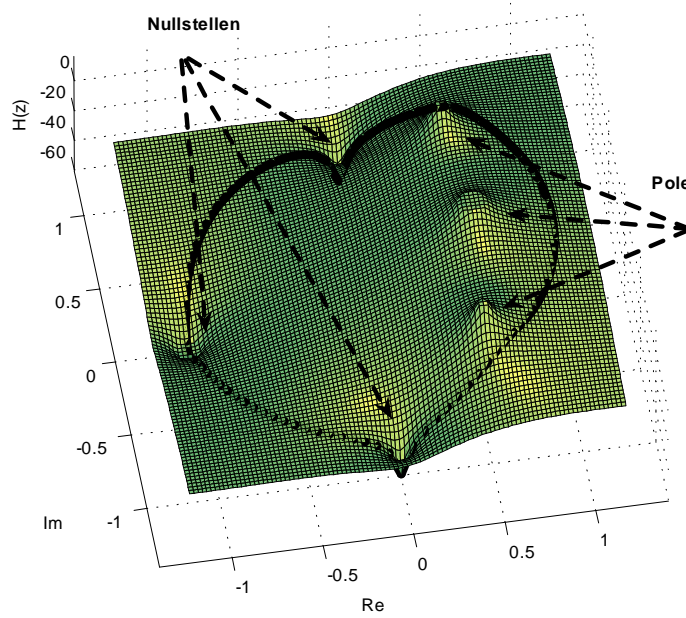


Abbildung 1.13: 3D-Plot des Betrags eines IIR-Filters 3.Ordnung

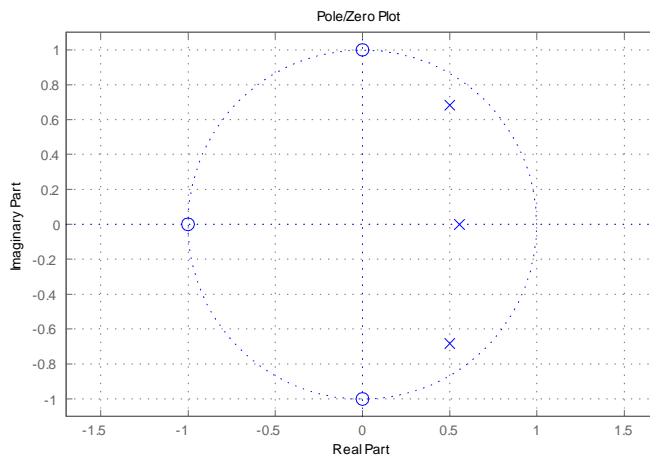


Abbildung 1.14: Pol-/Nullstellendiagramm des IIR-Filters 3. Ordnung

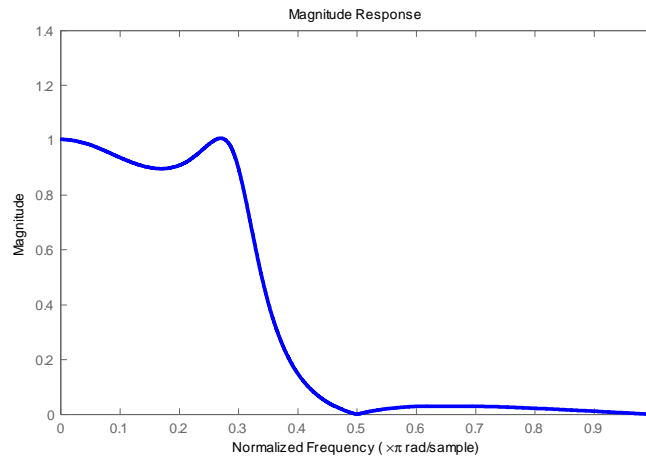


Abbildung 1.15: Frequenzgang des Filters 3.Ordnung

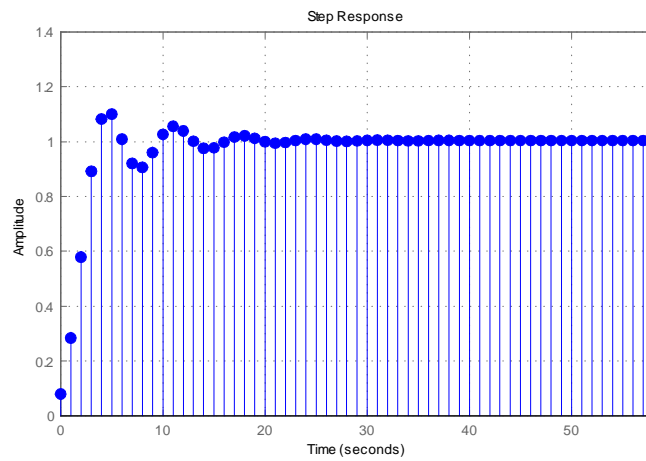


Abbildung 1.16: Sprungantwort IIR-Filter 3. Ordnung

$$\text{Linearität } ax_1[n] + bx_2[n] \Leftrightarrow aX_1(z) + bX_2(z) \quad (1.50)$$

$$\text{Verschiebung im Zeitbereich } x[n - n_0] \Leftrightarrow z^{-n_0} X(z) \quad (1.51)$$

$$\text{Einheitsimpuls } \delta_0[n] \Leftrightarrow 1 \quad (1.52)$$

$$\text{Verschobener Einheitsimpuls } \delta_0[n - n_0] \Leftrightarrow z^{-n_0} \quad (1.53)$$

$$\text{Faltung } x[n] * h[n] \Leftrightarrow X(z)H(z) \quad (1.54)$$

$$a^n \delta_{-1}[n] \Leftrightarrow \frac{1}{1 - az^{-1}} \quad (1.55)$$

$$\text{Sprungfunktion } \delta_{-1}[n] \Leftrightarrow \frac{1}{1 - z^{-1}} \quad (1.56)$$

1.8.1 Partialbruchzerlegung

Mit Hilfe der Partialbruchzerlegung wird eine Systemfunktion höherer Ordnung in eine Summe von gebrochen rationalen Funktionen 1. Ordnung³ zerlegt.

Durch die **Partialbruchzerlegung** wird ein System höherer Ordnung in Systeme 1. oder 2. Ordnung zerlegt.

$$H(z) = \frac{B(z)}{A(z)} = \frac{B(z)}{(1 - p_1 z^{-1})(1 - p_2 z^{-1}) \dots (1 - p_n z^{-1})} = \quad (1.57)$$

$$= \frac{R_1}{(1 - p_1 z^{-1})} + \frac{R_2}{(1 - p_2 z^{-1})} + \dots + \frac{R_n}{(1 - p_n z^{-1})} + K \quad (1.58)$$

Wegen der Linearität der z -Transformation und unter Verwendung der Beziehungen

$$\frac{1}{1 - az^{-1}} \Leftrightarrow a^n \delta_{-1}[n] \quad \text{und} \quad R \cdot H(z) \Leftrightarrow R \cdot h[n] \quad (1.59)$$

kann man $H(z)$ in $h[n]$ transformieren und damit die Impulsantwort von $H(z)$ ohne »Erraten« der Lösung der Differenzgleichung auf algebraischem Weg finden.

Ein Beispiel erläutert die Vorgangsweise. Zuerst zerlegen wir das Nennerpolynom in seine Wurzelarstellung⁴

$$H(z) = \frac{b_0 + b_1 z^{-1}}{(1 - p_1 z^{-1})(1 - p_2 z^{-1})} \quad (1.60)$$

Daraus finden wir die Partialbruchdarstellung

$$H(z) = \frac{R_1}{(1 - p_1 z^{-1})} + \frac{R_2}{(1 - p_2 z^{-1})} \quad (1.61)$$

Die Größen R_1 und R_2 nennt man Residuen von $H(z)$. Die Bestimmung der Residuen R_1 und R_2 kann durch Ausmultiplizieren und Koeffizientenvergleich erfolgen. Aus (1.61) erhalten wir zwei Gleichungen mit den Unbekannten R_1 und R_2 .

Es gibt aber einen eleganteren und schnelleren Weg. Wir formen um, indem

Es gibt mehrere Methoden, um die Partialbruchzerlegung durchzuführen.

³Fasst man konjugiert komplexe Pole zusammen, um reelle Koeffizienten für die Partialbruchzerlegung zu erhalten, dann entstehen Teilfunktionen 2. Ordnung.

⁴Die Berechnung der Nullstellen eines allgemeinen Polynomes kann nur bis zur 3. Ordnung, in Sonderfällen auch bis zu 4. Ordnung geschlossen erfolgen. Bei höheren Ordnungen können die Nullstellen nur mehr numerisch berechnet werden. Jedes Polynom der Ordnung n hat n Nullstellen, die entweder reell oder konjugiert komplex sind.

wir beide Seiten der Gleichung (1.60) und (1.61) mit $(1 - p_1 z^{-1})$ multiplizieren

$$\begin{aligned} H(z)(1 - p_1 z^{-1}) &= \frac{b_0 + b_1 z^{-1}}{(1 - p_2 z^{-1})} = \\ &= R_1 + R_2 \frac{(1 - p_1 z^{-1})}{(1 - p_2 z^{-1})} \end{aligned} \quad (1.62)$$

Gleichung (1.62) muss für alle z gelten, insbesondere auch an der Stelle des Pols $z = p_1$ und wir berechnen den Wert an dieser Stelle

$$\begin{aligned} H(z)(1 - p_1 z^{-1})|_{z=p_1} &= \frac{b_0 + b_1 z^{-1}}{(1 - p_2 z^{-1})}|_{z=p_1} = \\ &= R_1 + R_2 \frac{(1 - p_1 z^{-1})}{(1 - p_2 z^{-1})}|_{z=p_1} = R_1 \end{aligned} \quad (1.63)$$

Der Ausdruck $(1 - p_1 z^{-1})|_{z=p_1}$ wird Null, damit verschwindet der letzte Bruch und wir erhalten

$$R_1 = \frac{b_0 + b_1/p_1}{(1 - p_2/p_1)}$$

In ähnlicher Weise können wir R_2 berechnen und erhalten

$$R_2 = \frac{b_0 + b_1/p_2}{1 - p_1/p_2}$$

Beispiel 3 Wir führen die Rechnung mit einem Zahlenbeispiel durch

$$H(z) = \frac{-1 + 1.7z^{-1}}{1 - 0.4z^{-1} - 0.21z^{-2}} \quad (1.64)$$

$$H(z) = \frac{-1 + 1.7z^{-1}}{(1 + 0.3z^{-1})(1 - 0.7z^{-1})} \quad (1.65)$$

Daraus finden wir die Partialbruchdarstellung

$$H(z) = \frac{R_1}{(1 + 0.3z^{-1})} + \frac{R_2}{(1 - 0.7z^{-1})} \quad (1.66)$$

Wir formen um, indem wir beide Seiten der Gleichungen mit $(1 + 0.3z^{-1})$ multiplizieren

$$H(z)(1 + 0.3z^{-1}) = \frac{-1 + 1.7z^{-1}}{(1 - 0.7z^{-1})} = \quad (1.67)$$

$$= R_1 + R_2 \frac{(1 + 0.3z^{-1})}{(1 - 0.7z^{-1})} \quad (1.68)$$

Wir berechnen nun den Wert des obigen Ausdrucks an der Stelle des Pols $z = -0.3$

$$H(z)(1 + 0.3z^{-1})|_{z=-0.3} = \frac{-1 + 1.7z^{-1}}{(1 - 0.7z^{-1})}|_{z=-0.3} = \quad (1.69)$$

$$= R_1 + R_2 \frac{(1 + 0.3z^{-1})}{(1 - 0.7z^{-1})}|_{z=-0.3} = R_1 \quad (1.70)$$

$$R_1 = -2 \quad (1.71)$$

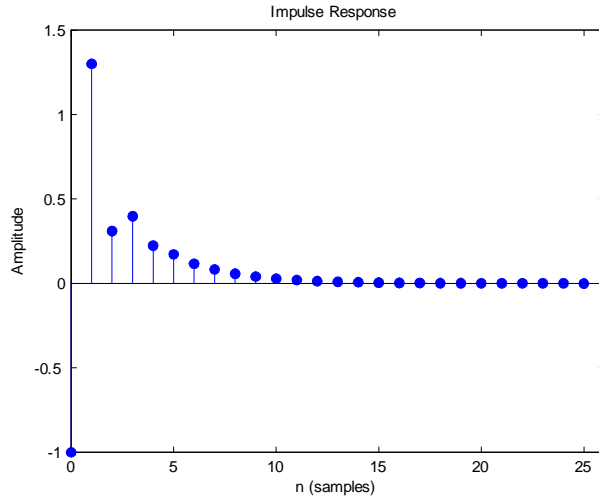


Abbildung 1.17: Impulsantwort $H(z) = \frac{-1+1.7z^{-1}}{1-0.4z^{-1}-0.21z^{-2}}$

$$H(z)(1 - 0.7z^{-1})|_{z=0.7} = \frac{-1 + 1.7z^{-1}}{(1 + 0.3z^{-1})}|_{z=0.7} = \tag{1.72}$$

$$= R_1 \frac{(1 - 0.7z^{-1})}{(1 + 0.3z^{-1})}|_{z=0.7} + R_2 = R_2 \tag{1.73}$$

$$R_2 = 1 \tag{1.74}$$

$$H(z) = \frac{-2}{(1 + 0.3z^{-1})} + \frac{1}{(1 - 0.7z^{-1})} \tag{1.75}$$

Durch Rücktransformation unter Verwendung von

$$a^n \delta_{-1}[n] \Leftrightarrow \frac{1}{1 - az^{-1}} \tag{1.76}$$

erhalten wir die Impulsantwort

$$h[n] = (-2)(-0.3)^n \delta_{-1}[n] + 0.7^n \delta_{-1}[n] \tag{1.77}$$

Zur Darstellung berechnen wir $h[n]$ numerisch mit der Matlab-Funktion `impz` $B = [-1 \ 1.7]$; $A = [1 \ -0.4 \ -0.21]$; `impz(B,A)` und erhalten Abbildung 1.17

Beispiel 4 Im vorigen Beispiel war der Zählergrad kleiner als der Nennergrad. Wenn das nicht der Fall ist, muss zuerst Zähler- durch Nennerpolynom dividiert werden, um einen kleineren Zählergrad zu erreichen. Ein Beispiel zeigt den Rechenvorgang

$$H(z) = \frac{1 + 0.9z^{-1} - 0.42z^{-2}}{1 - 0.4z^{-1} - 0.21z^{-2}} \tag{1.78}$$

Polynomdivision

$$(-0.42z^{-2} + 0.9z^{-1} + 1) : (-0.21z^{-2} - 0.4z^{-1} + 1) = 2 \tag{1.79}$$

$$-(-0.42z^{-2} - 0.8z^{-1} + 2) : \tag{1.80}$$

$$(1.7z^{-1} - 1) : \tag{1.81}$$

Die **Partialbruchzerlegung** ist nur dann möglich, wenn der **Zählergrad kleiner als der Nennergrad** ist. Is es nicht der Fall, ist eine Polynomdivision nötig.

$$H(z) = 2 + \frac{-1 + 1.7z^{-1}}{1 - 0.4z^{-1} - 0.21z^{-2}} = 2 + \frac{-1 + 1.7z^{-1}}{(1 + 0.3z^{-1})(1 - 0.7z^{-1})} \quad (1.82)$$

Der weitere Verlauf der Rechnung ist wie im vorigen Beispiel. Die Impulsantwort ist

$$h[n] = 2\delta[n] + (-2)(-3)^n \delta_{-1}[n] + 0.7^n \delta_{-1}[n] \quad (1.83)$$

Zusammenfassung Partialbruchzerlegung

Wir fassen die Schritte bei der inversen z -Transformation zusammen:

1. Zählergrad M muss kleiner Nennergrad N sein. (Wenn das nicht der Fall ist, muss vorher durch Polynomdivision die Bedingung $M < N$ hergestellt werden.)
2. Bestimmen der Nullstellen und Darstellung des Nennerpolynoms in der Form $(1 - p_k z^{-1})$, $k = 1, 2, \dots, N$
3. Partialbruchzerlegung von $H(z)$

$$H(z) = \sum_{k=1}^N \frac{R_k}{(1 - p_k z^{-1})} \quad R_k = H(z)(1 - p_k z^{-1})|_{z=p_k} \quad (1.84)$$

Die Rücktransformation ergibt die Impulsantwort

$$h[n] = \sum_{k=1}^N R_k (p_k)^n \delta_{-1}[n] \quad (1.85)$$

1.9 Einschwingvorgänge und Stabilität

Bei **IIR-Filtern** ist die **Einschwingzeit unendlich lang**.

Beim Anlegen einer eingeschalteten Sinusschwingung an FIR-Filter haben wir gesehen, dass sich das Filter nach der Einschwingzeit so verhält, also ob die Sinusschwingung ständig angelegt gewesen wäre. Die Dauer der Einschwingzeit ist gleich der Anzahl der Verzögerungsglieder des Filters. Die Berechnung des Einschwingvorgangs haben wir so durchgeführt, dass wir während der Einschwingphase die Differenzgleichung des Filters (mit der eingeschalteten Sinusschwingung als Eingangssignal) gelöst haben, nach der Einschwingzeit konnten wir den weiteren Verlauf mit Hilfe der Frequenzantwort des Filters bestimmen.

Für die Berechnung des Einschwingverhaltens von IIR-Filtern bedienen wir uns der z -Transformation. Wir erläutern die Vorgangsweise an einem System erster Ordnung

$$H(z) = \frac{b_0}{1 - a_1 z^{-1}} \quad (1.86)$$

Die mathematische Darstellung der eingeschalteten komplexen Exponentialfunktion der normierten Kreisfrequenz $\hat{\omega}_0$ lautet

$$x[n] = e^{j\hat{\omega}_0 n} \delta_{-1}[n] \quad (1.87)$$

Unter Verwendung des Transformationspaars

$$a^n \delta_{-1}[n] \Leftrightarrow \frac{1}{1 - az^{-1}} \quad (1.88)$$

wird daraus

$$X(z) = \frac{1}{1 - e^{j\hat{\omega}_0} z^{-1}} \quad (1.89)$$

Das Ausgangssignal ist

$$Y(z) = H(z)X(z) = \frac{b_0}{1 - a_1 z^{-1}} \cdot \frac{1}{1 - e^{j\hat{\omega}_0} z^{-1}} = \frac{b_0}{(1 - a_1 z^{-1})(1 - e^{j\hat{\omega}_0} z^{-1})} \quad (1.90)$$

Wir führen die Partialbruchzerlegung durch und transformieren dann in den Zeitbereich

$$Y(z) = \frac{\left(\frac{b_0 a_1}{a_1 - e^{j\hat{\omega}_0}}\right)}{(1 - a_1 z^{-1})} + \frac{\left(\frac{b_0}{1 - a_1 e^{-j\hat{\omega}_0}}\right)}{(1 - e^{j\hat{\omega}_0} z^{-1})} \quad (1.91)$$

$$y[n] = \underbrace{\left(\frac{b_0 a_1}{a_1 - e^{j\hat{\omega}_0}}\right) (a_1)^n \delta_{-1}[n]}_{\text{Transienter Anteil}} + \underbrace{\left(\frac{b_0}{1 - a_1 e^{-j\hat{\omega}_0}}\right) e^{j\hat{\omega}_0 n} \delta_{-1}[n]}_{\text{Eingeschwungener Zustand}} \quad (1.92)$$

Gleichung (1.92) besteht aus zwei Termen: Der erste Term ist die Folge $(\dots)(a_1)^n$, der zweite Term ist das Eingangssignal – die komplexe Exponentialfunktion – multipliziert mit dem Frequenzgang des Filters.

Der erste Term klingt für $n \rightarrow \infty$ ab, wenn $|a_1| < 1$ und wird daher transienter Anteil genannt. Wir sprechen von einem stabilen System, wenn der Einschwinganteil abklingt. Das immer dann der Fall, wenn der Pol (die Pole) der Systemfunktion innerhalb des Einheitskreises in der z -Ebene liegen. Liegt der Pol außerhalb des Einheitskreises, dann steigt $(a_1)^n$ an und das Filter ist nicht stabil.

Beispiel 5 Wir zeigen die Zusammenhänge an einem Beispiel. Für das Tiefpassfilter erster Ordnung mit den Koeffizienten $b_0 = 1$, $a_1 = -0.9$ und der komplexen Exponentialfunktion $\hat{\omega}_0 = 2\pi/10$ erhalten wir durch Einsetzen in (1.92)

$$\begin{aligned} y[n]_1 &= \left(\frac{-0.9}{-0.9 - e^{j0.2\pi}}\right) (-0.9)^n \delta_{-1}[n] = 0.4980 e^{-j0.3313} (-0.9)^n \delta_{-1}[n] \\ y[n]_2 &= \left(\frac{1}{1 + 0.9e^{-j0.2\pi}}\right) e^{j0.2\pi n} \delta_{-1}[n] = 0.5533 e^{j0.2971} e^{j0.2\pi n} \delta_{-1}[n] = \\ &= 0.5533 \cos(0.2\pi n + 0.2971) \delta_{-1}[n] + j0.5533 \sin(0.2\pi n + 0.2971) \delta_{-1}[n] \\ y[n] &= y[n]_1 + y[n]_2 \end{aligned}$$

Abbildung 1.18 zeigt den Realteil des Eingang- und Ausgangssignals.

Die **Systemantwort** eines IIR-Filters besteht aus einem **transienten Anteil** und einem **Anteil des eingeschwungenen Systems**.

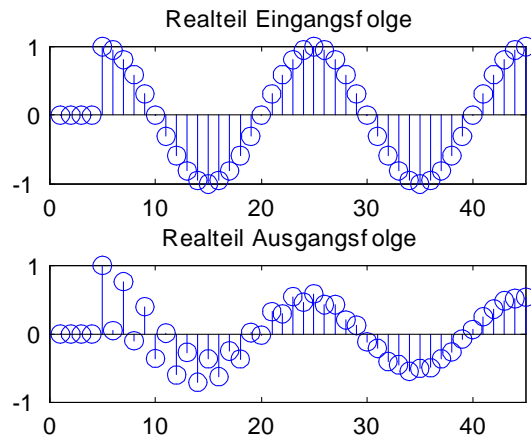


Abbildung 1.18: Antwort des Systems $H(z) = \frac{1}{1+0.9z^{-1}}$ auf eingeschaltetes Kosinussignal

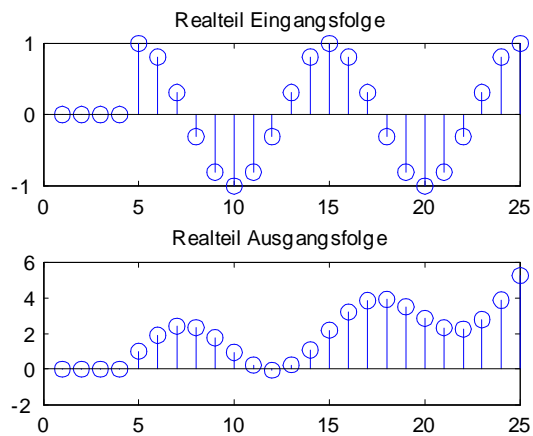


Abbildung 1.19: Instabiles Filter Polstelle bei $z_P = 1.1$

Abbildung 1.19 zeigt ein instabiles Filter mit einem Pol bei $a_1 = 1.1$.

Im allgemeinen Fall erhalten wir für die eingeschaltete komplexe Exponentialfolge $x[n] = e^{j\hat{\omega}_0 n} \delta_{-1}[n]$ die Ausgangsfolge eines Systems N -ter Ordnung mit Polstellen bei p_k

$$y[n] = \sum_{k=1}^N R_k(p_k)^n \delta_{-1}[n] + H(e^{j\hat{\omega}_0 n}) e^{j\hat{\omega}_0 n} \delta_{-1}[n] \quad (1.93)$$

Bei einem stabilen Filter klingt der transiente Anteil mit der Zeit ab.

1.10 Konjugiert komplexe Pole

Bisher haben wir Pole auf der reellen Achse betrachtet, Pole können aber nicht nur reell sondern auch konjugiert komplex auftreten.

Beispiel 6 Als Beispiel untersuchen wir ein System mit konjugiert komplexen Polen auf dem Einheitskreis bei $\hat{\omega} = \pi/4$

$$H(z) = \frac{1 + z^{-1}}{(1 - e^{j\pi/4} z^{-1})(1 - e^{-j\pi/4} z^{-1})} = \frac{1 + z^{-1}}{1 - 1.4142z^{-2} + z^{-2}} \quad (1.94)$$

Die Partialbruchzerlegung ergibt

$$H(z) = \frac{1.3066e^{-j1.1781}}{(1 - e^{j\pi/4} z^{-1})} + \frac{1.3066e^{j1.1781}}{(1 - e^{-j\pi/4} z^{-1})} \quad (1.95)$$

Die Impulsantwort erhalten wir durch inverse z -Transformation

$$\begin{aligned} h[n] &= 1.3066e^{-j1.1781} e^{(j\pi/4)n} \delta_{-1}[n] + \\ &\quad + 1.3066e^{j1.1781} e^{-j(\pi/4)n} \delta_{-1}[n] \\ h[n] &= 2 * 1.3066 \cos\left(\frac{\pi}{4}n - 1.1781\right) \delta_{-1}[n] \end{aligned} \quad (1.96)$$

Wie Gleichung (1.96) zeigt, erzeugt das mit einem Puls angeregte System eine Sinusschwingung! Die Impulsantwort ist die Sinusschwingung der Gleichung (1.96), dennoch ist dieses System nicht stabil, da es für das Eingangssignal der Frequenz $\pi/4$ ein unbegrenztes Ausgangssignal erzeugt (Resonanz).

Abbildung 1.20 zeigt die Impulsantwort unseres Beispiels.

Pole können entweder **reell** sein oder in **konjugiert komplexen Paaren** auftreten.

Beispiel 7 Als weiteres Beispiel untersuchen wir ein System mit Polen innerhalb des Einheitskreises.

$$H(z) = \frac{1 + z^{-1}}{1 - z^{-1} + 0.5z^{-2}} = \frac{1 + z^{-1}}{\left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}e^{j\pi/4}z^{-1}\right)\left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}e^{-j\pi/4}z^{-1}\right)} \quad (1.97)$$

$$= \frac{1.5811e^{-j1.2490}}{\left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}e^{j\pi/4}z^{-1}\right)} + \frac{1.5811e^{j1.2490}}{\left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}e^{-j\pi/4}z^{-1}\right)} \quad (1.98)$$

$$h[n] = 2 \cdot 1.5811 \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^n \cos\left(\frac{\pi}{4}n - 1.249\right) \quad (1.99)$$

Die Impulsantwort von $\frac{1+z^{-1}}{1-z^{-1}+0.5z^{-2}}$ zeigt Abbildung 1.21.

Wie man in Abbildung 1.21 erkennen kann, klingt die Impulsantwort ab. Wir haben ein stabiles System, da die Pole innerhalb des Einheitskreises liegen.

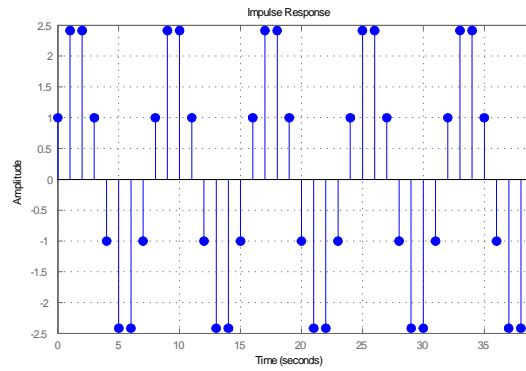


Abbildung 1.20: Impulsantwort IIR-Filter, Pole auf dem Einheitskreis

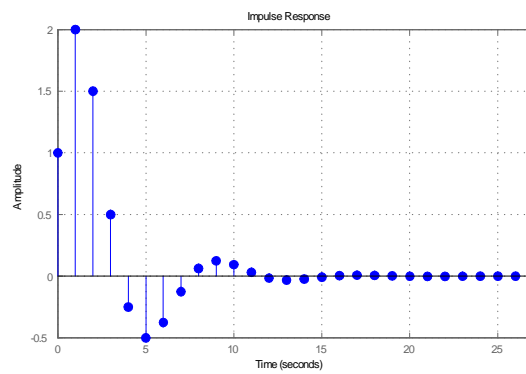


Abbildung 1.21: Impulsantwort

1.10.1 z -Transformierte komplexer Pole

Die Transformationsbeziehungen für komplexe Pole lauten allgemein

$$\begin{aligned}
 (\sin \omega_0 n) \delta_{-1}[n] &\Leftrightarrow \frac{(\sin \omega_0) z^{-1}}{1 - 2(\cos \omega_0) z^{-1} + z^{-2}} \\
 (\cos \omega_0 n) \delta_{-1}[n] &\Leftrightarrow \frac{1 - (\cos \omega_0) z^{-1}}{1 - 2(\cos \omega_0) z^{-1} + z^{-2}} \\
 (r^n \cos \omega_0 n) \delta_{-1}[n] &\Leftrightarrow \frac{1 - (r \cos \omega_0) z^{-1}}{1 - (2r \cos \omega_0) z^{-1} + r^2 z^{-2}} \\
 (r^n \sin \omega_0 n) \delta_{-1}[n] &\Leftrightarrow \frac{(r \sin \omega_0) z^{-1}}{1 - (2r \cos \omega_0) z^{-1} + r^2 z^{-2}} \\
 K \cdot r^n \cos(\omega_0 k + \varphi) \delta_{-1}[n] &\Leftrightarrow \frac{0.5K e^{j\varphi}}{1 - r e^{j\omega_0} z^{-1}} + \frac{0.5K e^{-j\varphi}}{1 - r e^{-j\omega_0} z^{-1}} \\
 K \cdot r^n \cos(\omega_0 k + \varphi) \delta_{-1}[n] &\Leftrightarrow \frac{b_0 + b_1 z^{-1}}{1 + 2a z^{-1} + r^2 z^{-2}} \\
 K &= \sqrt{\frac{b_1^2 r^2 + b_0^2 - 2ab_0 b_1}{r^2 - a^2}} \\
 \omega_0 &= \arccos\left(\frac{-a}{r}\right) \\
 \varphi &= \arctan \frac{ab_0 - b_1}{r^2 - a^2}
 \end{aligned}$$

Beispiel 8 Als Beispiel berechnen wir die Impulsantwort von $H(z) = \frac{1}{1+z^{-2}}$. Die Tabelle der Transformationsbeziehungen legt den Lösungsansatz $h[n] = \cos \omega_0 n$ nahe.

$$\begin{aligned}
 \cos(\omega_0 n) &\Leftrightarrow \frac{1 - (\cos \omega_0) z^{-1}}{1 - 2(\cos \omega_0) z^{-1} + z^{-2}} \\
 \cos \omega_0 &= 0 \quad \omega_0 = \arccos 0 = \pi/2 \\
 h(n) &= \cos\left(\frac{\pi}{2} n\right)
 \end{aligned}$$

Abbildung 1.22 zeigt die Impulsantwort unseres Beispiels.

1.11 Blockdiagramm der Partialbruchzerlegung

Die Systemfunktion eines IIR-Filters in Partialbruchzerlegung führt auf die Form

$$H(z) = b_{00} + \frac{b_{01}}{1 - a_{11} z^{-1}} + \dots + \frac{b_{02} + b_{12} z^{-1}}{1 - a_{12} z^{-1} - a_{22} z^{-2}} + \dots \quad (1.100)$$

Ein IIR-Filter kann mit Hilfe der **Partialbruchzerlegung** als eine **Parallelschaltung** von Filtern **1. und 2. Ordnung** realisiert werden.

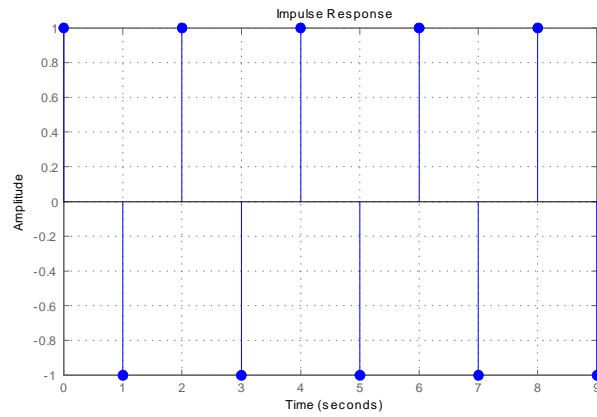


Abbildung 1.22: Impulsantwort $H(z) = \frac{1}{1+z^{-1}}$

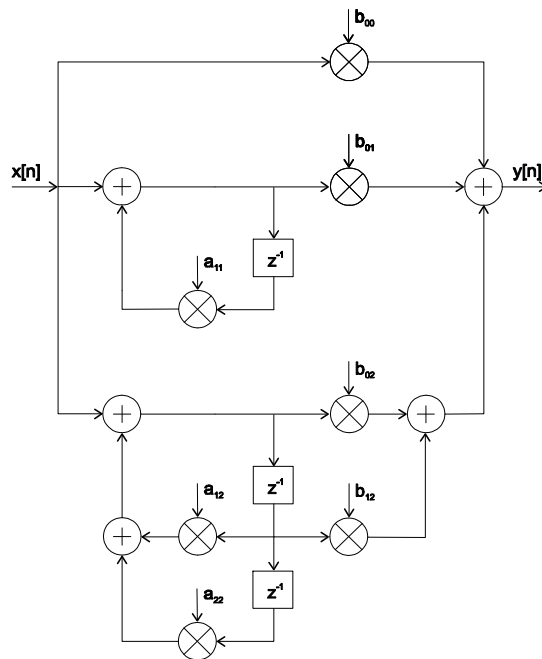


Abbildung 1.23: Blockdiagramm Partialbruchrealisierung

mit dem konstanten Faktor b_{00} , einem Block für einen reellen Pol und einem Block für die konjugiert komplexen Pole. Abbildung 1.23 zeigt das zugehörige Blockdiagramm.

Für mehrere einfache bzw. konjugiert komplexe Pole sind die entsprechenden Blöcke parallel zu schalten.

1.12 Darstellung von Systemen

Wir haben mehrere Formen der Darstellung von Systemen kennengelernt. Jede dieser Formen beschreibt das System eindeutig, welche Darstellung gewählt wird, hängt von der Aufgabenstellung ab.

Die einzelnen Darstellungsformen werden am Beispiel eines IIR-Filters 2. Ordnung zusammenfassend dargestellt.

Ein System kann auf mehrere Arten eindeutig beschrieben werden.

1.12.1 Zeitbereich

$$y[n] = a_1y[n-1] + a_2y[n-2] + b_0x[n] + b_1x[n-1] + b_2x[n-2] \quad (1.101)$$

Im Zeitbereich wird das Eingangs-/Ausgangsverhalten des Filters dargestellt. Der Zeitbereich dient der Darstellung des »wirklichen« (physikalischen) Signals. Das Ausgangssignal wird entweder durch Lösung der Differenzgleichung (1.101) gefunden oder durch Faltung des Eingangssignals mit der Impulsantwort des Systems ermittelt.

Zeitbereich:
Impulsantwort,
Sprungantwort,
Differenzgleichung

$$y(n) = x[n] * h[n] \quad (1.102)$$

Bei FIR-Filtern ist die Impulsantwort die Folge der Koeffizienten

$$h[n] = \sum_{k=0}^M b_k \delta_0[n-k] \quad (1.103)$$

Bei IIR-Filtern ist die Impulsantwort die Lösung der Differenzgleichung

$$h[n] = a_1h[n-1] + a_2h[n-2] + b_0\delta_0[n] + b_1\delta_0[n-1] + b_2\delta_0[n-2] \quad (1.104)$$

Diese DGL lässt sich im Zeitbereich in der Regel nur schwer lösen, kann aber mit Hilfe der z -Transformation und der Partialbruchzerlegung leicht gelöst werden.

1.12.2 z -Bereich

$$H(z) = \frac{b_0 + b_1z^{-1} + b_2z^{-2}}{1 - a_1z^{-1} - a_2z^{-2}} \quad (1.105)$$

Die Systemfunktion $H(z)$ lässt sich durch z -Transformation der Differenzgleichung (1.104) ermitteln. Diese Transformation ist sehr einfach durchzuführen. Der z -Bereich ist ein abstrakter Bereich, der wenig anschaulich ist, sich aber gut für Aufgabenstellungen im Bereich der Analyse und Synthese von Filtern eignet.

z -Bereich:
Systemfunktion,
PN-Diagramm

Die Systemfunktion wird neben der Polynomdarstellung auch häufig in der Pol-/Nullstellenform dargestellt

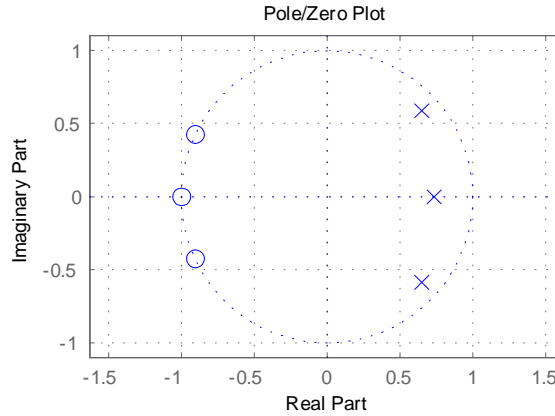


Abbildung 1.24: Pol-/Nullstellendarstellung

$$H(z) = K \frac{(z - z_1)(z - z_2)}{(z - p_1)(z - p_2)} \quad (1.106)$$

In dieser Form sind insbesondere Aussagen über die Stabilität des Filters möglich. Anstelle der Darstellung wie in Gleichung (1.106) wird häufig eine grafische Form gewählt, die man Pol/Nullstellendiagramm nennt. Abbildung 1.24 zeigt ein Beispiel einer PN-Darstellung.

Durch Transformation in den z -Bereich ist die Ermittlung der Impulsantwort des Filters einfach möglich. Die inverse z -Transformierte von $H(z)$ ist die Impulsantwort $h[n]$.

1.12.3 Frequenzbereich

Frequenzbereich:
Frequenzgang

Der Frequenzgang beschreibt die Antwort des Systems auf die komplexe Exponentialfunktion. Der Frequenzbereich ermöglicht eine Aussage über das Übertragungsverhalten von Filtern für »Töne« bzw. Spektren und erlaubt die Beschreibung des Durchlass- und Sperrverhaltens des Filters. Der Frequenzbereich ist ein Sonderfall des z -Bereichs für $z = e^{j\hat{\omega}}$.

$$H(e^{j\hat{\omega}}) = \frac{b_0 + b_1 e^{-j\hat{\omega}} + b_2 e^{-j2\hat{\omega}}}{1 - a_1 e^{-j\hat{\omega}} - a_2 e^{-j2\hat{\omega}}} \quad (1.107)$$

Abbildung 1.25 zeigt den Frequenzgang eines IIR-Filters.

1.12.4 Blockdiagramm

Hardware:
Blockdiagramm

Die Darstellung als Blockdiagramm eignet sich vor allem zur schematischen Darstellung der Hardwareblöcke eines Filters. Abbildung 1.26 zeigt ein Blockdiagramm eines IIR-Filters 2. Ordnung.

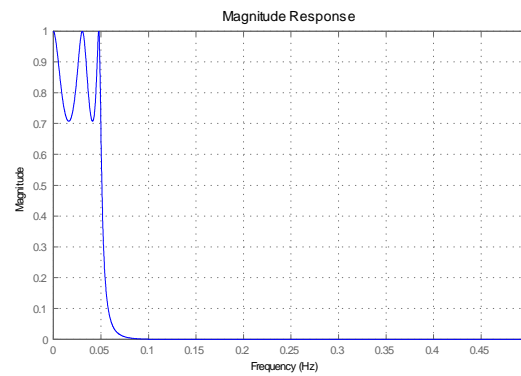


Abbildung 1.25: Elliptischer Tiefpass 5. Ordnung

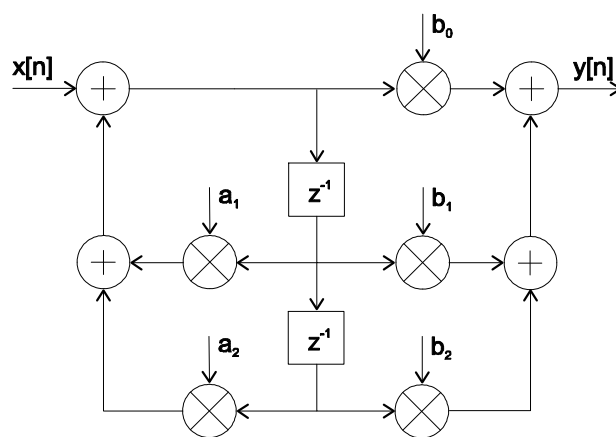


Abbildung 1.26: Blockdiagramm IIR-Filter 2. Ordnung

1.13 Zusammenfassung

IIR oder rekursive Filter verwenden zur Berechnung der Ausgangsgröße neben Werten der Eingangsgröße auch Werte der Ausgangsgröße. Das führt in der Zeitbereichsdarstellung zu Differenzgleichungen. Während diese Differenzgleichungen numerisch leicht zu lösen sind, kann eine analytische Lösung im Zeitbereich nur durch Erraten und Überprüfen eines Lösungsansatzes gefunden werden. Ein zielführenderes Verfahren ist die Verwendung der z -Transformation. Durch diese Abbildung entstehen aus den Differenzgleichungen im Originalbereich (n -Bereich) Polynome im Bildbereich (z -Bereich). Im z -Bereich kann die Systemantwort $Y(z) = H(z)X(z)$ leicht ermittelt werden, wenn $H(z)$ und $X(z)$ bekannt sind. $y[n]$ wird durch inverse z -Transformation von $Y(z)$ ermittelt, wobei man sich vorteilhafterweise der Partialbruchzerlegung und bekannter Transformationspaare aus Tabellen bedient. Mit Hilfe dieses Verfahrens ist eine systematische Lösung der Differenzgleichungen – ohne einen Lösungsansatz erraten zu müssen – möglich.

Die inverse z -Transformierte der Systemfunktion $H(z)$ ist die Impulsantwort, da die z -Transformierte des Einheitsimpulses $\delta_0[n] \Leftrightarrow 1$ ist.

Der Frequenzgang eines LTI-Systems lässt sich dadurch berechnen, dass für $z = e^{j\hat{\omega}}$ gesetzt wird. Der Frequenzbereich liegt innerhalb des z -Bereichs, $z = e^{j\hat{\omega}}$, also auf dem Einheitskreis.

Die Pole und Nullstellen der Systemfunktion lassen Aufschlüsse über das Verhalten eines Systems zu. Für stabile Systeme müssen die Pole innerhalb des Einheitskreises liegen, Nullstellen auf dem Einheitskreis bedeuten Nullstellen im Frequenzgang, d.h. Eingangsfrequenzen, die den Nullstellen entsprechen werden vom System vollständig unterdrückt.

IIR-Filter haben im Vergleich zu FIR-Filtern bei gleicher Ordnung einen steileren Übergang vom Durchlassbereich in den Sperrbereich und sind daher selektiver. Der Phasengang von IIR-Filtern ist allerdings nichtlinear, sie sind daher weniger geeignet für Signale deren Kurvenform bei der Filterung erhalten bleiben muss.