

Kapitel 1

FIR-Filter

Ein Filter ist ein System, das die Eigenschaften eines Signals verändert. Häufig wird der Begriff Filter und System synonym verwendet.

Wir beginnen die Beschreibung von diskreten (digitalen) Systemen mit den **Finite Impulse Response** Filtern, in Deutsch Nicht-rekursive Filter genannt.

Unter einem digitalen System verstehen wir eine Anordnung, die mit einem Transformationsprozess eine Eingangs-Folge in eine Ausgangs-Folge umwandelt. Abbildung 1.1 zeigt ein Blockdiagramm eines zeitdiskreten Systems.



Abbildung 1.1: Zeitdiskretes System

Als Beispiel für den Transformationsprozess eines Filters nehmen wir die Bildung des gleitenden Mittelwerts über drei Punkte einer Folge: In jedem Zeitpunkt wird der Ausgangswert aus drei zeitlich zurückliegenden¹ Punkten der Eingangsfolge gebildet.

Digitale Filter setzen **Eingangszahlenfolgen** in **Ausgangszahlenfolgen** um.

Ein **Beispiel** eines FIR-Filters ist das **Mittelwertfilter**.

n	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6	7	8
$x[n] =$			0	1	3	2	-1	2	0	0	0
$y[n]$			0	$\frac{1}{3}$	$\frac{4}{3}$	2	$\frac{4}{3}$	1	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	0

Der Ausgangswert zum Zeitpunkt $n = 0$ wird durch Mittelung der Werte $x[0, -1, -2] = [0, 0, 0]$ gebildet. Die Eingangsfolge hat zu den Zeitpunkten $x[-1, -2]$ keine definierten Werte, wir nehmen an, dass die Folge $x[n]$ zum Zeitpunkt $n[0]$ beginnt und setzen die Werte für $n < 0$ auf Null. Der Ausgangswert zum Zeitpunkt $n = 3$ wird aus den Werten $[2, 3, 1] \mapsto \frac{6}{3} = 2$ gebildet, u.s.w.

Wir können den Transformationsprozess von Eingangsfolge in Ausgangsfolge durch den folgenden Zusammenhang beschreiben

$$y[n] = \frac{1}{3} (x[n] + x[n - 1] + x[n - 2]) \quad (1.1)$$

¹Wir können bei kausalen Systemen nur Werte, die in der Vergangenheit liegen $[n - 1], [n - 2], \dots$ verwenden. Gehen auch Werte die in der Zukunft liegen $[n + 1], [n + 2], \dots$ in die Berechnung des Ausgangswerts ein, dann spricht man von nicht-kausalen Systemen. Echtzeitsysteme sind immer kausal.

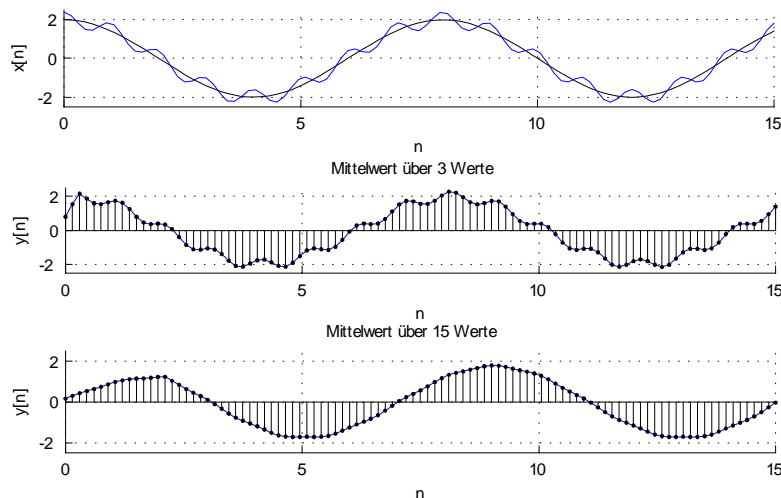


Abbildung 1.2: Mittelwertfilter

Um die Filterwirkung eines Mittelwertfilters besser verstehen zu können, erzeugen wir ein Signal, das aus einer Komponente niedriger und aus einer Komponente hoher Frequenz besteht.

$$x[n] = 2 \cos(\hat{\omega}n) + \frac{1}{5} \cos(8\hat{\omega}n) \quad (1.2)$$

Die Eingangsfolge $x[n]$ filtern wir mit zwei Filtern, einmal wird der Mittelwert über 3 Werte gebildet, das zweite Mal über 15 Werte..

Abbildung 1.2 stellt die Eingangsfolge und die beiden Ausgangsfolgen graphisch dar.

Aus Abbildung 1.2 können wir erkennen, dass am Anfang und am Ende des Ausgangssignals das Filter »gefüllt« bzw. »geleert« wird, diese Abschnitte nennt man Einschwing- und Abklingphase des Filters.

Das **Mittelwertfilter** hat ein **Tiefpassverhalten**.

Wir sehen, dass die höhere Frequenzkomponente geglättet (unterdrückt) wird. Wir können aus den Abbildungen schließen, dass das Ausmaß der Unterdrückung höherer Frequenzen davon abhängt, über wieviele Punkte der Mittelwert gebildet wird.

Ein Filterverhalten, das niedrige (tiefe) Frequenzen ungedämpft überträgt, während es hohe Frequenzen dämpft nennt man *Tiefpass-Filter*.

1.1 Allgemeine FIR-Filter

In unserem Beispiel haben wir den Transformationsprozess zwischen Eingangs- und Ausgangssignal über die Mittelwertbildung festgelegt. Für Mittelwertfilter können wir allgemein schreiben:

$$y[n] = \frac{1}{N} (x[n] + x[n-1] + \dots + x[n-(N-1)]) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} x[n-k] \quad (1.3)$$

Beim Mittelwertfilter haben wir für die Berechnung des Ausgangswertes alle Werte der Eingangfolge mit dem gleichen Wert $1/N$ multipliziert. Lassen wir bei der Berechnung der Ausgangfolge für jeden Wert der Eingangfolge einen eigenen Koeffizienten zu, dann erhalten wir die Filtergleichung für allgemeine FIR-Filter:

$$y[n] = \sum_{k=0}^M b_k x[n-k] \quad (1.4)$$

Die Größe M nennt man die Ordnung des Filters. Die Zahl der Werte, die in die Berechnung der Ausgangfolge eingehen ist also immer $M+1$. Das Mittelwertfilter ist ein Tiefpass-Filter, andere Filter-Charakteristika (Durchlassen von tiefen oder hohen Frequenzen, selektives Unterdrücken von Frequenzen oder selektives Durchlassen von Frequenzen) können durch die Wahl geeigneter Koeffizienten b_k erreicht werden.

Aus Gleichung (1.4) sieht man, das FIR-Filter lineare, zeitinvariante Systeme sind, weil bei der Transformation des Eingangssignals nur lineare Operationen (Multiplikation mit einer Konstante b_k und Addition) verwendet werden. Die Linearität kann auch rechnerisch leicht nachgewiesen werden:

$$\sum_{k=0}^M b_k (u \cdot x_1[n-k] + v \cdot x_2[n-k]) \quad (1.5)$$

$$= \sum_{k=0}^M b_k (u \cdot x_1[n-k]) + \sum_{k=0}^M b_k (v \cdot x_2[n-k]) \quad (1.6)$$

$$= u \cdot \sum_{k=0}^M b_k x_1[n-k] + v \cdot \sum_{k=0}^M b_k x_2[n-k] \quad (1.7)$$

Da bei jedem Berechnungsschritt jeder der Eingangswerte immer um die selbe Zeitkonstante² verschoben wird und die Koeffizienten b_k sich mit der Zeit nicht ändern, sind diese Systeme auch zeitinvariant.

1.2 Die Impulsantwort

Systeme können eine unendliche Anzahl von Signalen transformieren, wir können aber das Verhalten eines Systems nicht für jedes Eingangssignal berechnen und suchen daher einen Weg, wie wir die Eigenschaften von Systemen einfacher darstellen können.

- Wir wissen bereits, dass komplizierte Signale aus sinusförmigen Komponenten oder aus Einheitsimpulsen zusammengesetzt werden können. Wir können uns also jedes beliebige Eingangssignal aus sinusförmigen Komponenten oder aus Einheitsimpulsen »aufgebaut« vorstellen.
- Außerdem wissen wir, dass bei linearen zeitinvarianten Systemen der Überlagerungssatz gilt. Die Systemantwort auf ein beliebiges Eingangssignal

²Diskrete Systeme kennen streng genommen keinen Zeitbegriff, weil sie lediglich Folgen von Zahlen verarbeiten. Trotzdem wurde hier wegen der engen Beziehung zwischen Zahlenfolgen und abgetasteten Zeitsignalen der (dimensionslose!) Folgeparameter n als Zeit bezeichnet.

Beim FIR-Filter M -ter Ordnung entspricht jeder **Ausgangswert** einer **Linearkombination** der letzten $M+1$ **Eingangswerte**.

FIR-Filter sind **lineare zeitinvariante** Systeme.

Da es sich bei **FIR-Filtern** um **LTI-Systeme** handelt, gilt auch hier der **Überlagerungssatz**.

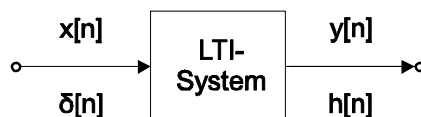


Abbildung 1.3: LTI-System

lässt sich durch Überlagerung der Systemantworten auf die Aufbauersignale ermitteln.

- Für Untersuchung der Eigenschaften von Systemen ist es daher ausreichend, wenn wir die Antwort des Systems auf die aufbauenden Funktionen kennen.

Wir befassen uns zunächst mit der Impulsantwort und gehen von Abbildung 1.3 aus.

Die Einheitsimpuls-Folge, kurz Einheitsimpuls genannt, ist für diskrete Systeme definiert

$$\delta_0[n] = \begin{cases} 1 & n = 0 \\ 0 & n \neq 0 \end{cases} \quad (1.8)$$

Zur Berechnung der Impulsantwort setzen wir als Eingangssignal $x[n] = \delta_0[n]$ und erhalten daraus das Ausgangssignal. Da die Impulsantwort einen besonderen Stellenwert bei der Untersuchung von LTI-Systemen hat, gibt man ihr die eigene Abkürzung $h[n]$.

$$y[n] = h[n] = \sum_{k=0}^M b_k \delta_0[n-k] = \begin{cases} b_n & n = 0, 1, \dots, M \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \quad (1.9)$$

Die **Impulsantwort** eines **FIR-Filters** setzt sich aus dessen **Filterkoeffizienten** zusammen.

Das Anlegen eines Einheitspulses an ein FIR-Filter bewirkt, dass am Ausgang die Folge der Filterkoeffizienten b_k erscheint. Da die Zahl der Koeffizienten endlich ist, ist auch die Dauer der Impulsantwort endlich, daher der Name **Finite Impulse-Response Filter**.

Unter Verwendung der Impulsantwort kann man Gleichung (1.4) auch in anderer Form anschreiben und erhält

$$y[n] = \sum_{k=0}^M h[k]x[n-k] \quad (1.10)$$

Gleichung (1.10) nennt man Faltungssumme, der Ausgang eines LTI-Systems wird berechnet, indem man die Eingangsfolge mit der Impulsantwort »faltet«.

Wie jedes LTI-System, wird auch ein FIR-Filter durch die Impulsantwort vollständig beschrieben.

Bemerkung 1 Kennt man die Impulsantwort eines Systems, dann kann man die Systemantwort für beliebige Eingangssignale berechnen. Mit der Kenntnis der Impulsantwort wissen wir alles über das Übertragungsverhalten eines Systems.

Beispiel 2 Matlab stellt die Funktion `impz(B,A)` zur Berechnung der Impulsantwort eines Filters zu Verfügung. Für ein FIR-Filter mit den Koeffizienten $B = [3, -1, 2, 1]$ erhalten wir die Impulsantwort in Abbildung 1.4.

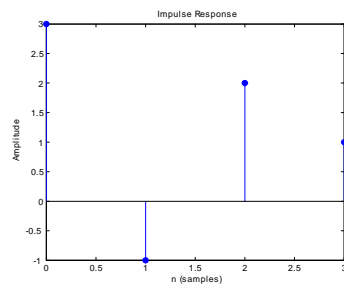


Abbildung 1.4: Impulsantwort FIR-Filter

$H = \text{impz}(B, 1)$, und H ist der Spaltenvektor der Impulsantwort. Wird kein Ergebnis zugewiesen, dann wird die Impulsantwort auf den Bildschirm ausgegeben. Für FIR-Filter ist $A = [1]$ und die Impulsantwort gleich den Koeffizienten b_k der Filtergleichung. Die Funktion `impz` ist daher besser für IIR-Filter geeignet, die wir später kennen lernen werden.

1.2.1 Die Faltungssumme

Die Faltung ist eine Rechenvorschrift, die aus der Impulsantwort und dem Eingangssignal das Ausgangssignal erzeugt. Die Faltung ist die wichtigste Operation bei der Untersuchung des Systemverhaltens im Zeitbereich, wir werden die Faltung daher genau untersuchen. Anstelle der Schreibweise

Das **Ausgangssignal** entsteht durch **Faltung** des **Eingangssignals** mit der **Impulsantwort**.

$$y[n] = \sum_{k=0}^M h[k]x[n-k]$$

ist auch die Kurzschreibweise

$$y[n] = x[n] * h[n] \quad (1.11)$$

gebräuchlich.

Wir können die Operation der Faltung aus zwei Blickwinkeln betrachten:

1. Wir untersuchen, wie jeder Wert des *Eingangssignals* zu allen Punkten des Ausgangssignals beiträgt.
2. Wir untersuchen, wie jeder Wert des *Ausgangssignals* aus allen Punkten des Eingangssignals gebildet wird.

Betrachtungsweise 1 hilft die Faltung aus Konzeptsicht zu verstehen, Betrachtungsweise 2 beschreibt lediglich den Rechenvorgang bei der Faltung.

Wirkung des Eingangssignals

Das Eingangssignal denken wir uns durch die Summe von gewichteten, zeitversetzten Impulsfunktionen gebildet.

Jeder Abtastwert des Eingangssignals erzeugt seine eigene – mit der Amplitude des Eingangssignals gewichtete – Impulsantwort. Die Antwort des Systems

ist die Summe aller gewichteten und zeitversetzten Impulsantworten. Wir zeigen den Zusammenhang an folgendem Beispiel:

$$\begin{array}{r}
 x[n] = [1, 2, 3, -2, 2, 1] \quad h[n] = [3, -1, 2, 1] \quad (1.12) \\
 \hline
 \begin{array}{r}
 x[0] = 1 \quad y[0] = 1 \cdot h[n-0] \quad 3 \quad -1 \quad 2 \quad 1 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \\
 x[1] = 2 \quad y[1] = 2 \cdot h[n-1] \quad 0 \quad 6 \quad -2 \quad 4 \quad 2 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \\
 x[2] = 3 \quad y[2] = 3 \cdot h[n-2] \quad 0 \quad 0 \quad 9 \quad -3 \quad 6 \quad 3 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \\
 x[3] = -2 \quad y[3] = -2 \cdot h[n-3] \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad -6 \quad 2 \quad -4 \quad -2 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \\
 x[4] = 2 \quad y[4] = 2 \cdot h[n-4] \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 6 \quad -2 \quad 4 \quad 2 \quad 0 \quad 0 \\
 x[5] = 1 \quad y[5] = 1 \cdot h[n-5] \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 3 \quad -1 \quad 2 \quad 1 \quad 0 \\
 \hline
 y[n] = \sum x[n]h[n-k] \quad 3 \quad 5 \quad 9 \quad -4 \quad 16 \quad 0 \quad 1 \quad 4 \quad 1 \quad 0
 \end{array}
 \end{array}$$

Zusammensetzung des Ausgangssignals

Aus Gleichung (1.10) sehen wir, dass sich jeder Wert des Ausgangssignals aus gewichteten und zeitversetzten Eingangssignalen zusammensetzt. Das Eingangssignal wird mit dem entsprechenden Wert der Impulsantwort gewichtet.

$$\begin{array}{r}
 h[0] = 3 \quad y[0] = 3 \cdot x[n-0] \quad 3 \quad 6 \quad 9 \quad -6 \quad 6 \quad 3 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \\
 h[1] = -1 \quad y[1] = -1 \cdot x[n-1] \quad 0 \quad -1 \quad -2 \quad -3 \quad 2 \quad -2 \quad -1 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \\
 h[2] = 2 \quad y[2] = 2 \cdot x[n-2] \quad 0 \quad 0 \quad 2 \quad 4 \quad 6 \quad -4 \quad 4 \quad 2 \quad 0 \quad 0 \\
 h[3] = 1 \quad y[3] = 1 \cdot x[n-3] \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 1 \quad 2 \quad 3 \quad -2 \quad 2 \quad 1 \quad 0 \\
 \hline
 y[n] = \sum h[k]x[n-k] \quad 3 \quad 5 \quad 9 \quad -4 \quad 16 \quad 0 \quad 1 \quad 4 \quad 1 \quad 0
 \end{array}$$

Die **Faltung** ist **kommutativ!**

Wie man sieht liefern beide Betrachtensweisen identische Ergebnisse, da die Faltung kommutativ ist.

$$x[n] * h[n] = h[n] * x[n] \quad (1.13)$$

Aus mathematischer Sicht macht es keinen Unterschied welches Signal das Eingangssignal und welches die Impulsantwort ist. Aus physikalischer Sicht ist nur die Überlagerung der Systemantworten auf die Impulse von denen sich das Eingangssignal zusammensetzt sinnvoll, die Zusammensetzung des Ausgangssignals aus gewichteten, zeitversetzten Eingangssignalen liefert lediglich eine Vorschrift zur Berechnung der Faltungssumme.

Abbildung 1.5 stellt den Faltungsvorgang grafisch dar. Insbesondere wird deutlich, woher der Begriff Faltung stammt: $x[-k]$ (d) entsteht durch Umklappen (Falten) von $x[k]$. Das Ergebnis der Faltung ist das Ausgangssignal $y[n]$, wobei n als Parameter in die Zeitsignale $x[]$ und $h[]$ eingeht. Um eine eindeutige Schreibweise zu ermöglichen, muss daher die Variable k eingeführt werden und Eingangsfolge und Impulsantwort werden zu $x[k]$ und $h[k]$ (Bild Mitte links und Mitte rechts).

$h[k]$ wird mit $x[-k]$ multipliziert, die Produkte werden summiert und ergeben $y[0]$ (links unten). $x[-k]$ wird um einen Schritt nach rechts verschoben ($x[1-k]$), mit $h[k]$ multipliziert und die Summe der Produkte liefert $y[1]$. $x[-k]$ wird um zwei Schritte verschoben, die Rechenvorschrift liefert $y[2]$, u.s.w. (Teilbild rechts unten) zeigt die Operation nach sechsmaliger Verschiebung.

Beispiel 3 Die Faltungssumme kann mit Matlab durch die Funktion `conv` berechnet werden.

$$\begin{array}{l}
 x = [1, 2, 3, -2, 2, 1] \quad h = [3, -1, 2, 1] \\
 \text{conv}(x, h) \Rightarrow 3 \quad 5 \quad 9 \quad -4 \quad 16 \quad 0 \quad 1 \quad 4 \quad 1
 \end{array}$$

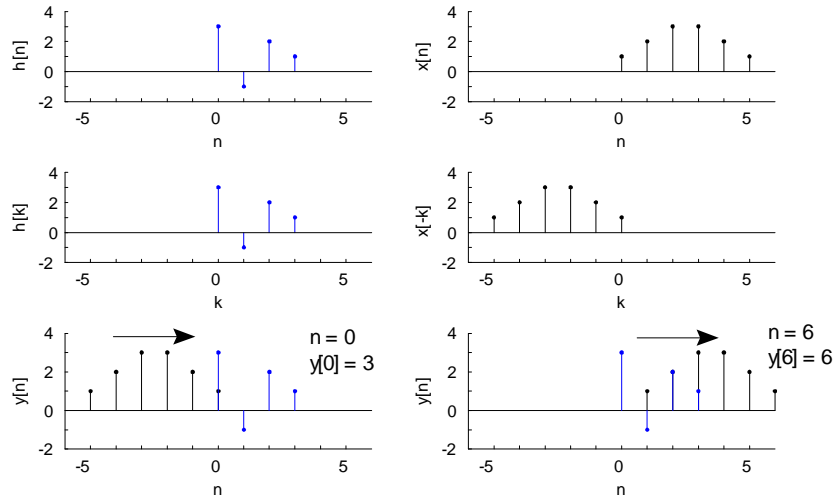


Abbildung 1.5: Faltung

Alternativ könnte die Funktion `filter` verwendet werden. $y = \text{filter}(B,A,x)$ berechnet für ein Filter mit den Koeffizienten B und der Eingangsfolge $x[n]$, die Ausgangsfolge $y[n]$. Für FIR-Filter ist $A = [1]$ und wir erhalten $B = [3 \ -1 \ 2 \ 1]$; $\text{filter}(B,1,[x,0 \ 0 \ 0 \ 0]) \Rightarrow 3 \ 5 \ 9 \ -4 \ 16 \ 0 \ 1 \ 4 \ 1 \ 0$

1.3 Frequenzgang von FIR-Filtern

Einheitsimpuls und komplexe Exponentialfunktion sind die wichtigsten Testsignale für die Untersuchung von Systemeigenschaften. Die Verwendung des Einheitsimpuls führt zur Faltungssumme und zur Darstellung von Systemeigenschaften im Zeitbereich. Die komplexe Exponentialfunktion führt zum Frequenzgang und zur Darstellung im Frequenzbereich. Sowohl die Darstellung im Zeitbereich, als auch die Darstellung im Frequenzbereich beschreiben ein System vollständig, sind aber unterschiedliche Betrachtensweisen der Systemeigenschaften. Je nach Aufgabenstellung ist die eine oder die andere Darstellung besser geeignet.

Für die **Darstellung** eines Filters im **Frequenzbereich** wird die **komplexe Exponentialfunktion** verwendet.

Zur Berechnung des Frequenzgangs gehen wir von der allgemeinen Gleichung der FIR-Filter aus

$$y[n] = \sum_{k=0}^M b_k x[n-k] = \sum_{k=0}^M h[k] x[n-k] \quad (1.14)$$

Das Eingangssignal ist die komplexe Exponentialfolge

$$x[n] = Ae^{j(\hat{\omega}n+\varphi)} = Ae^{j\varphi} e^{j\hat{\omega}n} \quad -\infty < n < \infty \quad (1.15)$$

Die Größe $\hat{\omega}$ nennt man die normierte Kreisfrequenz³.

³Durch die Abtastung geht, wie wir gesehen haben, die Zeitinformation verloren. Aus der Kreisfrequenz ω [1/sek] wird dadurch die dimensionslose Größe $\hat{\omega}$. In diskreten Systemen

$$\hat{\omega} = \omega T_s \quad T_s \dots \text{Abtastperiode} \quad (1.16)$$

Wir setzen (1.15) in die Gleichung des FIR-Filter ein und erhalten

$$y[n] = \sum_{k=0}^M b_k A e^{j\varphi} e^{j\hat{\omega}(n-k)} \quad (1.17)$$

$$= \left(\sum_{k=0}^M b_k e^{-j\hat{\omega}k} \right) A e^{j\varphi} e^{j\hat{\omega}n} \quad (1.18)$$

Wir sehen, dass $y[n]$ aus dem Ausdruck in Klammern, multipliziert mit der Eingangsfolge $x[n]$ besteht. Den Ausdruck in Klammern, die Funktion

$$H(\hat{\omega}) = \sum_{k=0}^M b_k e^{-j\hat{\omega}k} = \sum_{k=0}^M h[k] e^{-j\hat{\omega}k} \quad (1.19)$$

Der **Frequenzgang** eines FIR-Filters ist die (zeitdiskrete) **Fouriertransformierte seiner Impulsantwort**.

nennt man den Frequenzgang des Systems. $H(\hat{\omega})$ ⁴ kann für jede Eingangsfrequenz $\hat{\omega}$ berechnet werden und ist im Allgemeinen komplexwertig. Gleichung (1.19) ist nichts anderes als die DTFT von $h[k]$. Wir sehen, dass (analog zu kontinuierlichen Systemen) der Frequenzgang eines FIR-Filters die (zeitdiskrete) Fouriertransformierte seiner Impulsantwort ist.

Als Beispiel berechnen wir den Frequenzgang eines Filters mit den Koeffizienten $b_k = [1, 2, 1]$

$$H(\hat{\omega}) = 1e^{-j\hat{\omega}0} + 2e^{-j\hat{\omega}1} + 1e^{-j\hat{\omega}2} = 1 + 2e^{-j\hat{\omega}} + 1e^{-j2\hat{\omega}}$$

$H(\hat{\omega})$ könnte man durch einsetzen von Werten für $\hat{\omega}$ ausrechnen, wobei $H(\hat{\omega})$ für alle $\hat{\omega}$, mit Ausnahme von $\hat{\omega} = 0$, komplexe Werte annimmt. Real-/Imaginärteil oder Betrag/Phase von $H(\hat{\omega})$ kann man über $\hat{\omega}$ auftragen und erhält damit den Frequenzgang des Filters. Wir finden für unser Beispiel auch eine analytische Lösung durch Herausheben von $e^{-j\hat{\omega}}$

$$H(\hat{\omega}) = e^{-j\hat{\omega}} (e^{-j\hat{\omega}} + e^{j\hat{\omega}} + 2)$$

Verwenden wir die Euler'sche Beziehung

$$\cos \alpha = \frac{e^{j\alpha} + e^{-j\alpha}}{2}$$

so wird daraus

$$H(\hat{\omega}) = (2 + 2 \cos \hat{\omega}) e^{-j\hat{\omega}} \quad (1.20)$$

Die komplexwertige Funktion (1.20) lässt sich leicht in Betrag und Phase trennen und wir erhalten

$$|H(\hat{\omega})| = (2 + 2 \cos \hat{\omega}) \quad \angle H(\hat{\omega}) = -\hat{\omega} \quad (1.21)$$

Abbildung 1.6 zeigt den Frequenzgang in Betrag und Phase (strichliert).

haben wir es *immer* mit der Größe $\hat{\omega}$ zu tun. Wegen der einfacheren Schreibweise wird aber in der Literatur häufig für $\hat{\omega}$ nur ω geschrieben.

⁴Der Frequenzgang ist eine kontinuierliche Funktion, die für beliebige $\hat{\omega}$ definiert ist, daher die Schreibweise in runden Klammern.

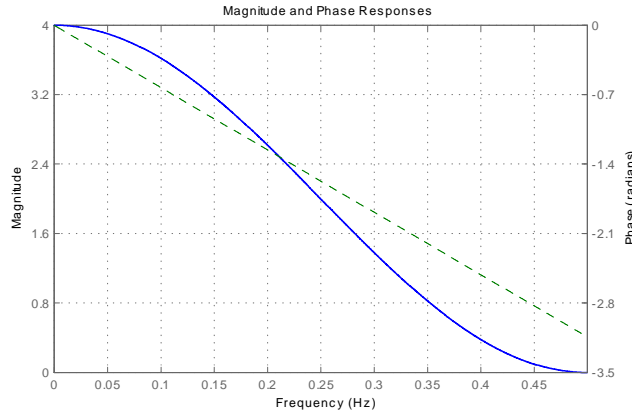


Abbildung 1.6: Frequenz- und Phasengang $b_k = [1, 2, 1]$

Wir können erkennen, dass die Amplituden niedriger Frequenzen weniger, während Amplituden höherer Frequenzen stärker abgeschwächt werden. Das FIR-Filter mit den Koeffizienten $b_k = [1, 2, 1]$ verhält sich wie ein Tiefpass-Filter. Die Phase ist eine lineare Funktion der Frequenz.

Wie wir sehen, hängt der Frequenzgang des Filters

$$H(\hat{\omega}) = \sum_{k=0}^M b_k e^{-j\hat{\omega}k} \quad (1.22)$$

nur von den Koeffizienten b_k ab und kann für beliebige Eingangsfrequenzen aus der Beziehung (1.22) berechnet werden.

Aus der Beziehung

$$y[n] = \left(\sum_{k=0}^M b_k e^{-j\hat{\omega}k} \right) A e^{j\varphi} e^{j\hat{\omega}n} \quad (1.23)$$

$$= H(\hat{\omega}) \cdot \underbrace{A e^{j\varphi}}_{\text{komplexe Eingangsamplitude}} \cdot e^{j\hat{\omega}n} \quad (1.24)$$

$$= \underbrace{\{H(\hat{\omega}) A e^{j\varphi}\}}_{\text{komplexe Ausgangsamplitude}} \cdot e^{j\hat{\omega}n} \quad (1.25)$$

Die **komplexe Exponentialfunktion verändert** beim Durchlaufen eines FIR-Filters **nur** ihre **Amplitude**. Die Ausgangsamplitude erhält man **durch Multiplikation** der Eingangsamplitude **mit dem Frequenzgang**.

können wir erkennen, dass die komplexe Exponentialfunktion beim Durchgang durch das Filter erhalten bleibt. Für das Eingangssignal $A e^{j\varphi} e^{j\hat{\omega}n}$ ändert sich lediglich die (komplexe) Amplitude von $A e^{j\varphi} \rightarrow H(\hat{\omega}) A e^{j\varphi}$. Aus der komplexen Zahl $A e^{j\varphi}$ wird durch Multiplikation mit dem komplexen Wert $H(\hat{\omega})$ die Amplitude der komplexen Ausgangsfunktion.

Bemerkung 4 Die komplexe Exponentialfunktion ist die einzige Signalform, die das lineare System ohne Änderung der Kurvenform durchläuft. Es ändern sich lediglich Amplitude und Phase, die Eigenschaft, sinusförmige Funktion zu sein, bleibt erhalten!

Der Ausdruck $y[n] = H(\hat{\omega})x[n]$ gilt **nur** für die Eingangsfunktion $x[n] = A e^{j\varphi} e^{j\hat{\omega}n}$ und hat für keine andere Eingangsfunktion eine Bedeutung!

In den meisten Anwendungen ist der **Amplitudengang** eines Filters von **größerer Bedeutung als** der **Phasengang**.

Der komplexwertige Frequenzgang wird grafisch entweder in Real- und Imaginärteil

$$H(\hat{\omega}) = \operatorname{Re}\{H(\hat{\omega})\} + j \operatorname{Im}\{H(\hat{\omega})\} \quad (1.26)$$

oder in Betrag und Phase

$$H(\hat{\omega}) = |H(\hat{\omega})| e^{j\angle H(\hat{\omega})} \quad (1.27)$$

dargestellt. Für die Berechnung des Übertragungsverhaltens von Filtern ist die Darstellung in Betrag und Winkel die geeignetere, da man sich in der Regel dafür interessiert, welchen Einfluss das Filter auf die Amplitude (Verstärkung oder Abschwächung) der Frequenzkomponenten hat. Die Wirkung auf die Phase ist in der Regel weniger wichtig.

Bemerkung 5 *Nicht jedes System das auf eine sinusförmige Eingangsschwingung eine sinusförmige Ausgangsschwingung erzeugt muss linear sein. Ein gutes Beispiel dafür ist der Phasenregelkreis. Bei dieser Schaltung wird ein freilaufender Oszillator auf eine externe Sinusschwingung synchronisiert. Der Phasenregelkreis ist aber nichtlinear und der Überlagerungssatz gilt nicht, wie man sich leicht durch Anlegen von zwei Sinusschwingungen an den Phasenregelkreis überlegen kann: Der interne Oszillator kann nur auf eine der beiden Sinuskomponenten synchronisiert werden.*

Beispiel 6 *Die Berechnung von Amplituden- und Phasengang kann einfach mit der Matlabfunktion `freqz` durchgeführt werden. `freqz(B,A)` berechnet den (komplexen) Wert der Systemfunktion $H(z) = \frac{B(z)}{A(z)}$. Für FIR-Filter ist $A(z) = 1$ und wir erhalten für das Beispiel*

$B = [1 \ 2 \ 1]; H = \text{freqz}(B,1);$

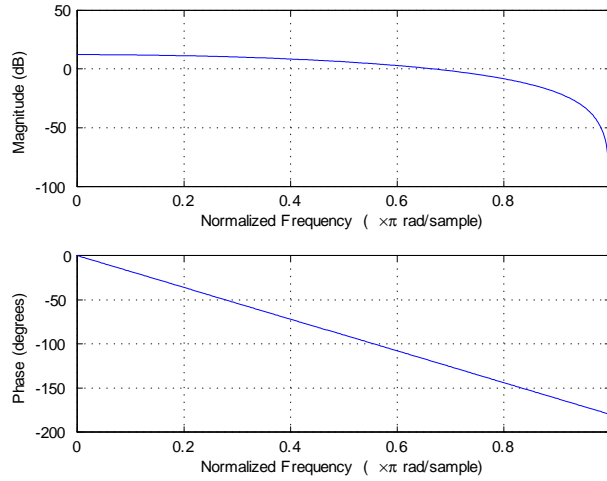
H ist ein Spaltenvektor des (komplexen) Frequenzgangs. Wird `freqz(B,1)` keinem Ergebnis zugewiesen, dann wird der Amplitudengang (in logarithmischer Darstellung in dB) und der Phasengang auf dem Bildschirm angezeigt, wie Abbildung 1.7 zeigt.

Sinusschwingungen sind ein gutes Werkzeug zur praktischen Überprüfung der Linearität eines Systems, indem man an den Eingang ein Sinussignal anlegt und den Ausgang mit einem Oszilloskop beobachtet.

- Als erstes wird beobachtet, ob das Ausgangssignal sinusförmig ist.
- Dann wird die Amplitude des Eingangssignal verändert und beobachtet, ob das Signal sinusförmig bleibt.
- Dann wird die Frequenz des Eingangssignals verändert und das Ausgangssignal beobachtet. Amplitude und Phase des Ausgangssignals werden sich ändern, bei bestimmten Frequenzen möglicherweise sogar Null werden, die Kurvenform bleibt aber bei linearen Systemen sinusförmig.

Ein Übertragungsverhalten, das die Form von Sinusschwingungen behält, ist ein Indiz, aber kein Beweis für die Linearität eines Systems.

Diese messtechnische Untersuchung ist selbstverständlich kein strenger Beweis dafür, dass das System linear ist. Für praktische Zwecke kann man aber gut abschätzen, ob das System (im untersuchten Bereich) linear ist.

Abbildung 1.7: Amplituden- und Phasengang von $B = [1, 2, 1]$

1.3.1 Frequenzgang und Überlagerungssatz

Signale lassen sich aus sinusförmigen Schwingungen zusammensetzen. Wir können gedanklich jede einzelne Frequenzkomponente durch ein LTI-System schicken, die Amplituden der Frequenzkomponenten des Ausgangssignals $\{H(\hat{\omega})Ae^{j\varphi}\}$ berechnen und das Ausgangssignal aus diesen Frequenzkomponenten zusammensetzen.

Ein einfaches Beispiel erläutert die Rechenschritte :

An unserem FIR-Filter mit den Koeffizienten $b_k = [1, 2, 1]$ liegt das Eingangssignal

$$x[n] = 2 + 3 \cos\left(\frac{\pi}{4}n - \frac{\pi}{2}\right) + 2 \cos\left(\frac{9}{10}\pi n\right).$$

Als ersten Schritt berechnen wir den Frequenzgang für die normierten Kreisfrequenzen 0^5 , $\pi/4$ und 0.9π und erhalten die Werte:

$$H(0) = 4 \quad H\left(\frac{\pi}{4}\right) = 3.414 \angle (-0.7854) \quad H(0.9\pi) = 0.097 \angle (-2.8274)$$

Mit diesen Werten multiplizieren wir die (komplexen) Amplituden des Eingangssignals und erhalten als Ausgangssignal:

$$y[n] = 4 \cdot 2 + 3.414 \cdot 3 \cos\left(\frac{\pi}{4}n - \frac{\pi}{2} - 0.7854\right) + 0.097 \cdot 2 \cos\left(0.9n - \frac{\pi}{2} - 2.8274\right)$$

Das Ausgangssignal ist die Zeitfunktion $y[n]$, die Berechnung des Ausgangssignals erfolgt aber im Frequenzbereich. Die Berechnung des Ausgangssignals im Zeitbereich wäre mathematisch aufwändiger und würde die Berechnung der Faltungssumme erforderlich machen. Im Frequenzbereich ist die Berechnung sehr

⁵ Ein konstantes Signal kann man auch als ein Kosinussignal mit der Frequenz 0 darstellen.

Die **Berechnung** des Ausgangssignals kann auch im **Frequenzbereich** erfolgen, indem man mit Hilfe des Frequenzgangs die **Ausgangsamplitude jeder Frequenzkomponente** berechnet.

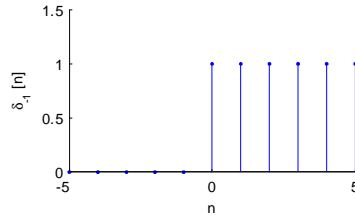


Abbildung 1.8: Sprungfunktion

einfach, es sind lediglich die (komplexen) Amplituden des Eingangssignals mit dem Frequenzgang zu multiplizieren.

Beispiel 7 Die Funktion $\text{freqz}(B,A)$ berechnet den Frequenzgang, kann aber auch für die Berechnung des Übertragungsfaktors diskreter Frequenzen verwendet werden, wenn man die gewünschten (Kreis)Frequenzen bei der Berechnung übergibt $[H,w] = \text{freqz}(B,A,w)$

$Hx = \text{freqz}([1 \ 2 \ 1], 1, [0, (\pi/4), (\pi*9/10)])$

$[4, (2.4142 - 2.4142i), (-0.0931 - 0.0302i)] = [4e^{j0}, 3.41420e^{-j0.7854}, 0.979e^{-j2.8274}]$

1.3.2 Einschaltvorgänge

Einschaltvorgänge werden mathematisch mit Hilfe der **Sprungfunktion** modelliert.

Der Frequenzgang hat nur für sinusförmige Eingangssignale eine Bedeutung. Sinusförmige Signale erstrecken sich von $-\infty < n < \infty$, jedes praktische Signal hat aber einen Anfang, es wird »eingeschaltet«. Wir wollen nun untersuchen, wie sich das »Einschalten« auf das Systemverhalten auswirkt. Zur mathematischen Darstellung einer eingeschalteten komplexen Exponentialfunktion multiplizieren wir die Funktion mit der Sprungfunktion. Die Sprungfunktion ist definiert

$$\delta_{-1}[n] = \begin{cases} 1 & n \geq 0 \\ 0 & n < 0 \end{cases} \quad (1.28)$$

Abbildung 1.8 zeigt die Sprungfunktion.

Die eingeschaltete komplexe Exponentialfunktion lässt sich darstellen

$$x[n] = X e^{j\hat{\omega}n} \delta_{-1}[n] = \begin{cases} X e^{j\hat{\omega}n} & 0 \leq n \\ 0 & n < 0 \end{cases} \quad (1.29)$$

Für den Ausgang des Systems müssen wir daher schreiben

$$y[n] = \sum_{k=0}^M b_k X e^{j\hat{\omega}(n-k)} \delta_{-1}[n-k] \quad (1.30)$$

FIR-Filter haben immer eine **endliche Einschwing- und Abklingphase**.

Wie man sich leicht überlegen kann, hat das Ausgangssignal drei Zeitschnitte.

- Für $n < 0$ liegt kein Eingangssignal an, der Ausgang ist daher Null.
- Für die Zeit $0 \leq n < M$ »schwingt« das Filter ein. Erst wenn für die Berechnung des Ausgangssignals $M + 1$ Werte des von Null verschiedenen Eingangssignals ($n - M \geq 0$) zur Verfügung stehen, ist der Einschwingvorgang abgeschlossen.

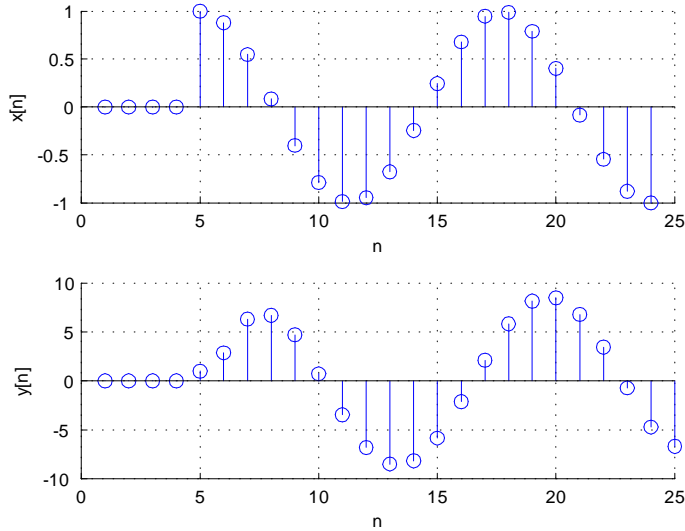


Abbildung 1.9: Eingeschaltetes Kosinussignal

- Ab dem Zeitpunkt $n \geq M$ verhält sich das Filter so, als ob ständig eine komplexe Exponentialfunktion angelegen wäre. Das Filter hat keine längere »Erinnerung« als der Ordnung des Filters entspricht.

Für die diese drei Abschnitte erhalten wir folgende Beziehungen:

$$y[n] = \begin{cases} 0 & n < 0 \\ \left(\sum_{k=0}^n b_k e^{-j\hat{\omega}k} \right) X e^{j\hat{\omega}n} & 0 \leq n < M \\ \left(\sum_{k=0}^M b_k e^{-j\hat{\omega}k} \right) X e^{j\hat{\omega}n} & n \geq M \end{cases} \quad (1.31)$$

Bemerkung 8 Immer dann, wenn eine Änderung des Eingangssignals auftritt (Amplitude oder Phase oder Frequenz) findet ein neuer Einschwingvorgang des Filters statt, der die Dauer M hat. Die Berechnung des Ausgangssignals während des Einschwingvorgangs muss im Zeitbereich durch Lösen der Filtergleichung erfolgen. Mehr dazu erfahren wir im Kapitel über IIR-Filter.

Ein einfaches Beispiel zeigt den Einschwingvorgang des FIR-Tiefpasses mit den Koeffizienten $b_k = \{1, 2, 4, 2, 1\}$ an den wir ein eingeschaltetes Kosinussignal anlegen. Abbildung 1.9 zeigt das Eingangs- und Ausgangssignal.

1.4 Blockdiagramm von FIR-Filtern

Betrachtet man die Filtergleichung des FIR-Filters

$$y[n] = \sum_{k=0}^M b_k x[n - k] \quad (1.32)$$

Bei der Realisierung von FIR-Filtern müssen die Operationen **Verzögerung** (Speicherung), **Multiplikation** und **Addition** durchgeführt werden.

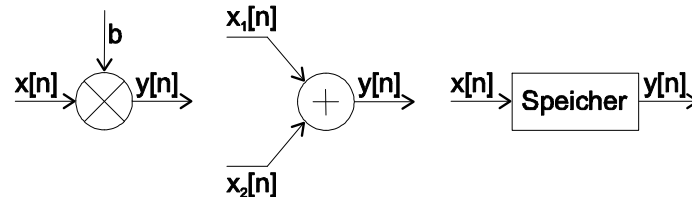


Abbildung 1.10: Recheneinheiten digitaler Filter

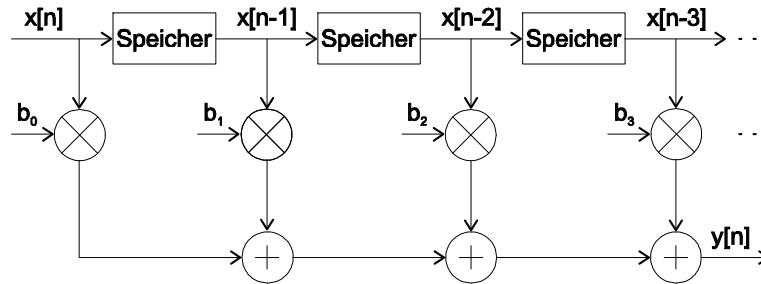


Abbildung 1.11: Blockdiagramm Direktform FIR-Filter

so sieht man, dass für die Berechnung des Ausgangssignals drei Rechenoperationen erforderlich sind: Speicherung (Verzögerung) der Werte des Eingangssignals $x[n-1]$, $x[n-2]$, \dots , $x[n-M]$, Multiplikation mit den Filterkoeffizienten b_k und Summenbildung $\sum_{k=0}^M$. Zur Durchführung dieser Operationen brauchen wir die entsprechenden Recheneinheiten, die in Abbildung 1.10 dargestellt sind.

Aus der Filtergleichung lässt sich damit das Blockdiagramm eines FIR-Filters zeichnen, wie Abbildung 1.11 zeigt.

$$y[n] = b_0x[n] + b_1x[n-1] + b_2x[n-2] + b_3x[n-3] \quad (1.33)$$

Das Blockdiagramm ist ebenso eine eindeutige Darstellung eines FIR-Filters wie Impulsantwort und Frequenzgang!

Die Filterstruktur nach Abbildung 1.11 nennt man *Direktform*, da die Filterkoeffizienten direkt aus der Filtergleichung genommen werden können. Eine weitere Realisierung ist in Abbildung 1.12 gezeigt.

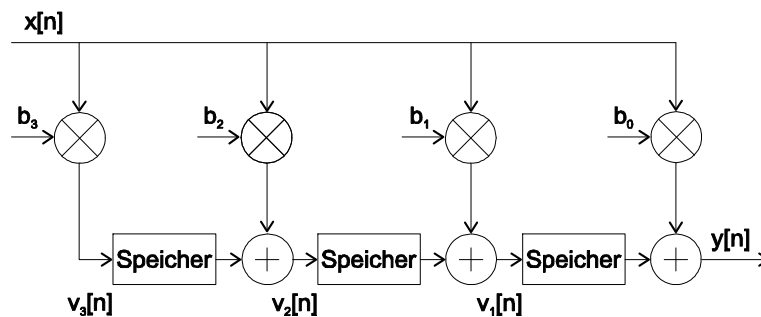


Abbildung 1.12: Blockdiagramm FIR Transponierte Form

Die Filtergleichung ergibt sich aus:

$$\begin{aligned}y[n] &= b_0x[n] + v_1[n-1] \\v_1[n] &= b_1x[n] + v_2[n-1] \\v_2[n] &= b_2x[n] + v_3[n-1] \\v_3[n] &= b_3x[n]\end{aligned}$$

Diese Filtergleichungen können durch Einsetzen gelöst werden:

$$\begin{aligned}y[n] &= b_0x[n] + b_1x[n-1] + v_2[n-2] \\v_2[n] &= b_2x[n] + b_3x[n-1] \\&\downarrow \\y[n] &= b_0x[n] + b_1x[n-1] + b_2x[n-2] + b_3x[n-3]\end{aligned}$$

Die Realisierung nach Abbildung (1.12) nennt man *transponierte Form*.

An den Blockdiagrammen sieht man, wie das Eingangssignal mit der Impulsantwort des Filters gefaltet wird. Die direkte und die transponierte Form repräsentieren die im Abschnitt 1.2.1 vorgestellten zwei verschiedenen Betrachtungsweisen der Faltung.

FIR-Filter können in **direkter** oder **transponierter Form** realisiert werden.

1.4.1 Realisierung von Filtern

Zur Realisierung von (FIR)-Filtern stehen drei Möglichkeiten zur Verfügung. Welche Form der Implementierung gewählt wird hängt vom Einsatzgebiet und von wirtschaftlichen Überlegungen ab.

1. Realisierung des FIR-Algorithmus durch einen Allzweckrechner

Die Realisierung in einem Allzweckrechner kann sehr schnell durchgeführt werden, eignet sich daher gut für die Untersuchung der Eigenschaften der Rechenvorschrift des Filters. Nachteil ist, dass Allzweckrechner groß, für ausschließliche Berechnung der Filteraufgabe zu teuer und zu schwer sind und einen hohen Stromverbrauch haben, was sie für praktische Signalverarbeitungsaufgaben in der Regel unbrauchbar macht.

2. Realisierung durch einen Signalprozessor

Wirtschaftlich sinnvolle Lösungen bieten sich in vielen Fällen durch Signalprozessoren an. Bei der Analyse der Rechenaufgaben, die ein digitales Filter durchführen muss, stellt man fest, dass die Operationen Multiplikation und Addition sehr häufig vorkommen. Standardprozessoren sind nicht für Multiplikationen optimiert und daher langsam. Signalprozessoren optimieren vor allem die Operation Multiply/Add und erreichen für diese Aufgabenstellung eine sehr hohe Rechenleistung. Darüber hinaus sind in den meisten Signalprozessoren noch die Funktionen der Signal-Abtastung und -Rekonstruktion integriert. Es gibt eine Vielzahl von Signalprozessoren, die in der Regel für spezielle Aufgabenstellungen maßgeschneidert sind.

Welche Art der technischen Umsetzung von digitalen Filtern gewählt wird, hängt von den Anforderungen der konkreten Anwendung ab.

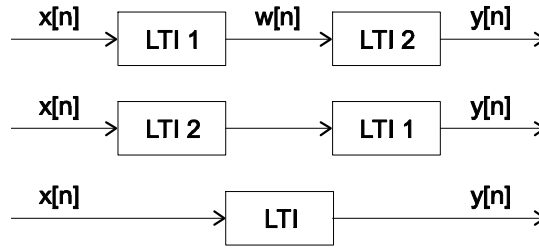


Abbildung 1.13: Kaskadieren von FIR-Filtern

3. Realisierung in Hardware

Die Realisierung in dedizierter Hardware führt zu sehr kleinen Lösungen in Form von Chips, die schnell sind und wenig Leistung brauchen. HW-Realisierungen sind erst ab Stückzahlen in der Größenordnung von mehreren Hunderttausend wirtschaftlich herzustellen und nur eingeschränkt veränderbar, d.h. Anzahl und Wert der Filterkoeffizienten können nicht oder nur eingeschränkt geändert werden.

1.5 Kaskadieren von Filtern

Abbildung 1.13 zeigt zwei kaskadierte LTI-Systeme.

Bei der Zusammenschaltung im *Zeitbereich* erhalten wir:

$$y[n] = (x[n] * h_1[n]) * h_2[n] \quad (1.34)$$

$$y[n] = (x[n] * h_2[n]) * h_1[n] \quad (1.35)$$

$$y[n] = x[n] * (h_1[n] * h_2[n]) \quad (1.36)$$

Da die **Faltung** (im Zeitbereich) und die **Multiplikation** (im Frequenzbereich) **kommutativ** und **transitiv** sind, können Filter in **beliebiger Reihenfolge** hintereinander **geschaltet** werden und durch einfach berechenbare Ersatzsysteme **ersetzt** werden.

Da die Faltung kommutativ ist, spielt die Reihenfolge der Kaskadierung $LTI_1 \rightarrow LTI_2$ oder $LTI_2 \rightarrow LTI_1$ keine Rolle. Die Impulsantwort eines einzelnen Ersatzsystems ist $h[n] = h_1[n] * h_2[n]$.

Bei der Zusammenschaltung im *Frequenzbereich* erhalten wir:

$$y_1[n] = H_2(\omega) (H_1(\omega) e^{j\hat{\omega}n}) = H_2(\omega) H_1(\omega) e^{j\hat{\omega}n} \quad (1.37)$$

$$y_2[n] = H_1(\omega) (H_2(\omega) e^{j\hat{\omega}n}) = H_2(\omega) H_1(\omega) e^{j\hat{\omega}n} \quad (1.38)$$

$$y[n] = (H_2(\omega) H_1(\omega)) e^{j\hat{\omega}n} \quad (1.39)$$

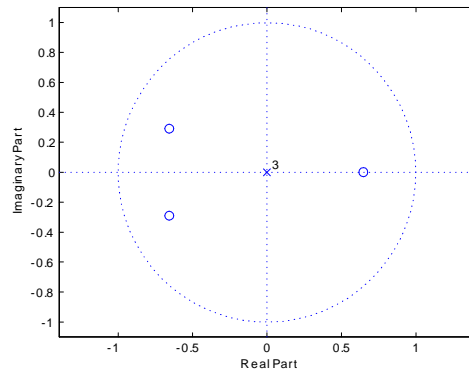
Der Frequenzgang eines einzelnen Ersatzsystems ist $H_2(\omega) H_1(\omega)$.

Anstelle der Faltung im Zeitbereich tritt die Multiplikation im Frequenzbereich.

$$h_1[n] * h_2[n] \Leftrightarrow H_1(\omega) H_2(\omega) \quad (1.40)$$

Beispiel 9 Den⁶ Zusammenhang $H(\omega) = H_1(\omega) H_2(\omega)$ können wir dazu verwenden, ein System höherer Ordnung in Teilsysteme niedriger Ordnung aufzuspalten, was Vorteile bei der Implementierung bringt. Dazu müssen wir $H(\omega)$ in

⁶Dieses Beispiel ist etwas vorgegriffen und sollte erst nach dem Kapitel über Pol- und Nullstellen gelesen werden. Inhaltlich passt es aber an diese Stelle.



die Nullstellendarstellung bringen und die Nullstellen dann den Teilfunktionen $H_1(\omega)$ und $H_2(\omega)$ zuordnen.

Mit Hilfe der Matlabfunktion `tf2zpk`, wandeln wir die Polynomdarstellung in die Nullstellendarstellung um

$B = [3 \ 2 \ -1 \ -1]$; $A = [1]$;

$[z, p, k] = \text{tf2zpk}(B, 1)$ liefert einen Spaltenvektor für die Nullstellen. Die Polstellen von FIR-Filtern liegen im Nullpunkt. Da das Polynom $B(j\omega) = 3 + 2(j\omega)^{-1} - (j\omega)^{-2} - (j\omega)^{-3}$ dritter Ordnung ist erhalten wir drei Nullstellen $z' \Rightarrow 0.6465, -0.6566 - 0.2907i, -0.6566 + 0.2907i$

aus denen wir ein Subsystem 1. Ordnung mit der reellen und ein Subsystem 2. Ordnung mit den beiden konjugiert komplexen Nullstellen bilden und zwar

$z1 = z([1;])$; $z2 = z([2 \ 3;])$; $p1 = [0]$; $p2 = [0; 0]$;

Das Subsystem 1, bestehend aus den Nullstellen $z1$ und das Subsystem 2, bestehend aus den Nullstellen $z2$, wandeln wir mit Hilfe der Funktion `zp2tf` aus der Nullstellendarstellung in die Polynomdarstellung um und erhalten

$H1 = \text{zp2tf}(z1, p1, 1)$; $H2 = \text{zp2tf}(z2, p2, k)$;

$H1(j\omega) = 1.0000 - 0.6465(j\omega)^{-1}$; $H2(j\omega) = 3.0000 + 3.9395(j\omega)^{-1} + 1.5468(j\omega)^{-2}$

$H(j\omega) = H_1(\omega)H_2(\omega)$ erhalten wir durch Multiplikation der Systemfunktionen der Teilsysteme

$\text{conv}(H1, H2) \Rightarrow 3 \ 2 \ -1 \ -1$

Zur Veranschaulichung der Trennung zeigen wir die Nullstellen (o) und Polstellen (x) von $H(z)$

1.5.1 Vom idealen zum realen Filter

Der Frequenzgang des idealen Tiefpassfilters ist

$$H_{iTP}(\hat{\omega}) = \begin{cases} 1 & |\hat{\omega}| \leq \omega_c \\ 0 & \omega_c < |\hat{\omega}| \leq \pi \end{cases} \quad (1.41)$$

Die Impulsantwort eines Filters erhält man durch inverse Fouriertransformation des Frequenzgangs $H(\hat{\omega}) \Rightarrow h[n]$.

$$h_{iTP} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} H_{iTP}(\hat{\omega}) e^{j\hat{\omega}n} d\hat{\omega} = \frac{1}{2\pi} \left(\frac{e^{j\omega_c n}}{jn} - \frac{e^{-j\omega_c n}}{jn} \right) \dots = \frac{\sin \omega_c n}{\pi n}, \quad -\infty < n < \infty \quad (1.42)$$

Das **ideale Tiefpassfilter** kann **nicht realisiert** werden, weil es **nicht kausal** ist.

Die Impulsantwort eines idealen Filters ist nicht kausal, d.h. das Filter antwortet bereits **vor** dem Anlegen des Impulses. Nichtkausale Filter sind in Echtzeit nicht realisierbar! Um zu einem realisierbaren Filter zu gelangen, schneiden wir die Impulsantwort bei $-M \leq n \leq M$ ab und verschieben um M nach rechts. Die Koeffizienten des kausalen Tiefpasses sind dann

$$h_{TP} = \begin{cases} \frac{\sin[\omega_c(n-M)]}{\pi(n-M)} & 0 \leq n \leq N-1, \quad N = 2M+1 \\ 0 & \text{außerhalb} \end{cases} \quad (1.43)$$

Die Fouriertransformation der **durch Abschneiden »kausalisierten« Impulsantwort** des idealen Filters ergibt den Frequenzgang des **realen Filters**.

Die durch das Abschneiden der Impulsantwort h_{iTP} entstehende Impulsantwort h_{TP} ist nicht mehr die Impulsantwort des idealen Filter. Wir müssen daher den Frequenzgang des zur Impulsantwort h_{TP} gehörigen realen Filters berechnen:

Die Operation des Abschneiden bei $-M \leq n \leq M$ kann auch durch Multiplikation der Impulsantwort des idealen Filters mit einem Rechteckfenster (im Zeitbereich) dargestellt werden.

$$h_{TP} = h_{iTP} \cdot w_R \quad (1.44)$$

Wir berechnen den Frequenzgang des Filters H_{TP} durch Fouriertransformation der Impulsantwort. Die Fouriertransformierte von h_{iTP} kennen wir bereits, sie ist der Frequenzgang des idealen Filters. Die Fouriertransformierte der Rechteckfunktion haben wir bereits im Abschnitt über die Signalrekonstruktion kennengelernt und dort gesehen, dass die *Si*-Funktion auftritt. Aus der Multiplikation im Zeitbereich wird die Faltung im Frequenzbereich und wir erhalten zusammengefasst

$$H_{TP}(\hat{\omega}) = H_{iTP}(\hat{\omega}) * W_R(\hat{\omega}) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} H_{iTP}(\hat{\omega}) W_R(\hat{\omega}) d\hat{\omega} \quad (1.45)$$

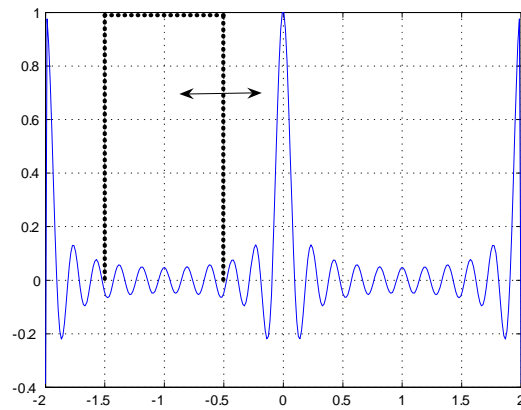
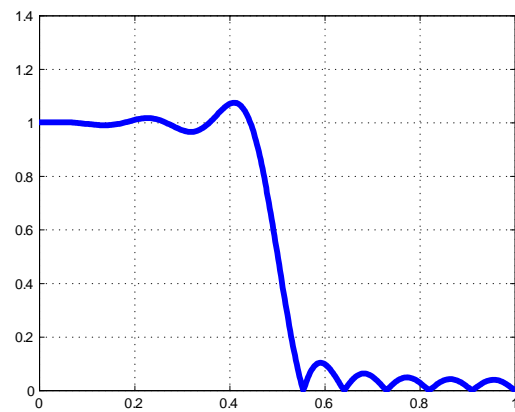
$$w_R[n] = \begin{cases} 1 & 0 \leq |n| \leq M \\ 0 & \text{außerhalb} \end{cases} \quad (1.46)$$

$$W_R(\hat{\omega}) = \sum_{n=-M}^M e^{j\hat{\omega}n} = \frac{\sin \left[\frac{(2M+1)\hat{\omega}}{2} \right]}{\sin \frac{\hat{\omega}}{2}} \quad (1.47)$$

Gleichung (1.47) ist die Fouriertransformierte des Rechteckfensters, die periodische sinc-Funktion (Diriclet'sche Funktion), wie in Abbildung 1.14 dargestellt.

Der Frequenzgang von $H_{TP}(\hat{\omega})$ ergibt sich durch Faltung der in Abbildung 1.14 dargestellten Funktionen. Das Ergebnis ist in Abbildung 1.15 dargestellt.

Der Frequenzgang des realisierbaren Filters $H_{TP}(\hat{\omega})$ weicht vom (idealen) rechteckförmigen Frequenzgang ab. Je größer M gewählt wird, desto genauer

Abbildung 1.14: $W_R(\hat{\omega})$ und $H_{iTP}(\hat{\omega})$ in normierter DarstellungAbbildung 1.15: Ergebnis der Faltung $|H_{TP}(\hat{\omega})|$

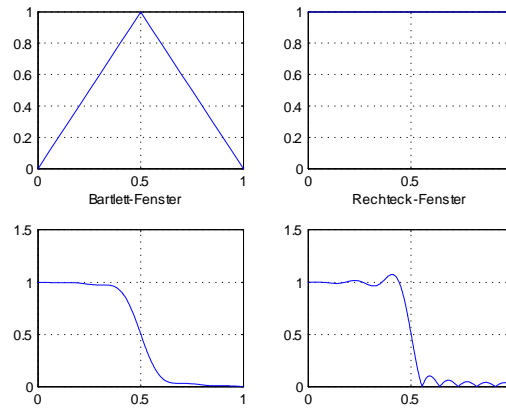


Abbildung 1.16: Vergleich Tiefpass mit Dreieck- und Rechteckfenster

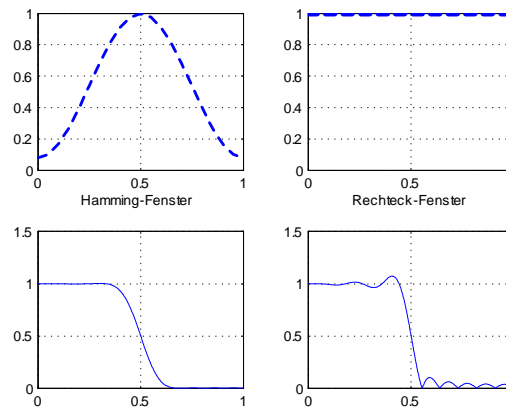


Abbildung 1.17: Tiefpass mit Hamming- bzw. Rechteckfenster

kann das Rechteck angenähert werden, es bleibt aber immer eine Abweichung (Gibbs'sches Phänomen im Frequenzbereich), ähnlich der Abweichung bei der Fourierzerlegung von Rechteckschwingungen.

Die Welligkeit im Durchlassbereich des Filters $H_{TP}(\hat{\omega})$ entsteht durch den abrupten Übergang des Rechteckfensters im Zeitbereich. Wählt man einen »sanfteren«, linearen Übergang mit einem Dreiecksfenster, verschwindet die Welligkeit im Durchlassbereich, wie Abbildung 1.16 zeigt.

Es gibt verschiedene Arten die Impulsantwort des idealen Filters zu »bescheiden«. Welche benutzt wird, hängt von der Anwendung ab.

Es gibt eine Reihe weiterer Fenster (Hamming, Hann, Blackmann, ...), die den Übergang mittels einer modifizierten Kosinusfunktion realisieren. Abbildung 1.17 vergleicht das Rechteck- mit dem Hamming-Fenster

$$w_{\text{Hamming}}[n] = 0.54 + 0.46 \cos\left(\frac{2\pi n}{2M+1}\right) \quad -M \leq n \leq M \quad (1.48)$$

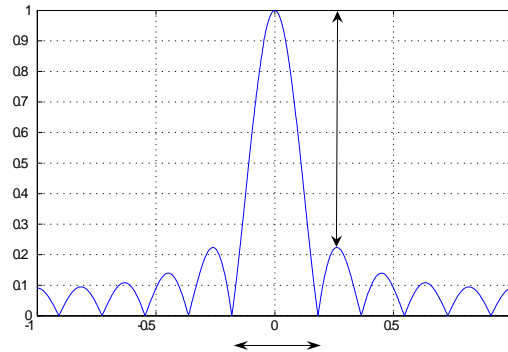


Abbildung 1.18: Fenstereigenschaften

Wie wir sehen, ist beim Hamming-Filter die Welligkeit im Durchlassbereich verschwunden, allerdings ist die Flankensteilheit des Übergangs zwischen Durchlass- und Sperrbereich beim Hamming-Filter geringer als beim Rechteck-Filter.

Die bisher betrachteten Fensterfunktionen haben keinen wählbaren Parameter, der es erlauben würde, die Filtereigenschaften zu beeinflussen. Das Kaiser-Fenster verwendet die Besselfunktion erster Art nullter Ordnung

$$w_{\text{Kaiser}} = \frac{I_0 \left[\beta \sqrt{1 - (n/M)^2} \right]}{I_0(\beta)}, \quad -M \leq n \leq M \quad (1.49)$$

mit dem Parameter β . Erhöhen von β macht die Hauptkeule breiter und verringert die Amplituden der Nebenkeulen (erhöht die Dämpfung im Sperrbereich). Typische Werte von β liegen zwischen $4 < \beta < 9$. Für $\beta = 0$ geht das Kaiserfenster in das Rechteckfenster über.

Um die unterschiedlichen Fensterfunktion vergleichen zu können, geht man von der Kurvenform ihrer Fouriertransformierten, wie in Abbildung 1.18 gezeigt, aus.

Dabei interessiert vor allem die Breite der Hauptkeule (der erste Nulldurchgang) und die Amplitude der größten Nebenkeule.

Fenster	$\mathbf{B}_{\text{Haupt}}$	$\mathbf{A}_{\text{Neben}}$
Rechteck	$4\pi/(2M+1)$	-13 dB
Hann	$8\pi/(2M+1)$	-32 dB
Hamming	$8\pi/(2M+1)$	-43 dB
Blackmann	$12\pi/(2M+1)$	-58 dB

Wie man obiger Tabelle entnehmen kann, ist die Amplitude der größten Nebenkeule umso kleiner, je breiter die Hauptkeule ist. Für ein Tiefpassfilter gilt daher: Je höher die Sperrdämpfung, desto weniger steilflankig ist der Übergang vom Durchlass- in den Sperrbereich.

In ähnlicher Weise können die Filterfunktionen von Hochpass, Bandpass und Bandsperre ermittelt werden, indem man die Impulsantworten der idealen Filter ermittelt, abschneidet und kausal macht.

Neben der Berechnung der Filterkennlinie mit Hilfe von Fensterfunktionen

kann die Filterfunktion auch durch Approximation im Durchlass- und Sperrbereich gefunden werden, wie z.B. beim Dolph-Tschebyscheff oder Remez-Entwurf.

Da der Rechenaufwand zur Berechnung von Filterfunktionen hoch ist, bedient man sich entsprechender Programme wie z.B. der Matlab Filterdesign Toolbox.

1.6 Zusammenfassung

FIR-Filter realisieren Rechenvorschriften, die ausschließlich Werte der Eingangsfolge $x[n]$ verwenden. Durch Wahl der Filterkoeffizienten b_k kann das gewünschte Verhalten des Filters (Tiefpass, Hochpass, Bandpass, Bandsperre) verwirklicht werden.

Zur Untersuchung der Eigenschaften von (FIR-)Filtern verwendet man die Impulsantwort und den Frequenzgang. Beliebige Eingangssignale lassen sich aus Impulsfolgen bzw. komplexen Exponentialfolgen zusammensetzen und bei LTI-Systemen mit dem Überlagerungssatz berechnen.

Die Impulsantwort – und daher auch die Einschwing- und Abklingzeit – von FIR-Filtern hat endliche Dauer. FIR-Filter können lineare Phase haben, eine Eigenschaft, die für die Erhaltung der Kurvenform von Signalen wichtig ist. FIR-Filter sind immer stabil und lassen sich gut in Hardware und Software realisieren. FIR-Filter sind bei gleicher Ordnung weniger selektiv als die später vorgestellten IIR-Filter oder umgekehrt zur Realisierung einer gewünschten Filterselektivität ist bei FIR-Filtern eine höhere Ordnung als bei IIR-Filtern erforderlich, was zu höheren Implementierungskosten führt.