Kapitel 1

Die z-Transformation

In den Abschnitten über die Impulsantwort und den Frequenzgang haben wir die Antwort eines Systems auf den Einheitspuls und die komplexe Exponentialfunktion ermittelt. Das Eingangsignal $x[n]$ wird durch die Systemantwort $T\{x[n]\}$ in das Ausgangssignal transformiert. Es ist zu beachten, dass die ermittelten Beziehungen $T\{x[n]\}$, also $h[n]$ und $H(\omega)$ nur für den Einheitsimpuls bzw. die komplexe Exponentialfunktion eine Bedeutung haben!

Wir untersuchen nun das Systemverhalten für eine weitere Eingangsgröße und zwar für

Eine weitere sehr wichtige **»Testfunktion«** für digitale Systeme ist die Funktion z^n

$$x[n] = z^n \qquad \text{für alle } n \tag{1.1}$$

wobei z eine beliebige komplexe Zahl ist.

Während der Einheitsimpuls und ein sinusförmiges Eingangsignal (in der mathematischen Darstellung der komplexen Exponentialfunktion) einen Bezug zur physikalischen Welt haben, ist das beim Eingangssignal z^n nicht der Fall. In Anlehnung an die Bezeichnungen Zeitbereich und Frequenzbereich, nennen wir die Darstellung mit z den z-Bereich.

Der z-Bereich ist eine abstrakte mathematische Welt, die eine Reihe von Eigenschaften hat, die bei der Untersuchung von Systemeigenschaften sehr hilfreich sind:

Der **z-Bereich** kann nicht so einfach physikalisch interpretiert werden wie der Frequenzbereich, hat aber viele **Vorteile aus mathematischer Sicht**.

- Durch die $z-$Transformation werden aus Differenzengleichungen gebrochen rationale Funktionen, es werden damit Polynome für die Systembeschreibung eingeführt. Polynome sind »gutartige« Funktionen, mit den sich leicht rechnen lässt. Algebraische Operationen wie Division, Multiplikation und Faktorisierung von Polynomen entsprechen dem Zerlegen bzw. Zusammensetzen von LTI Systemen.

- Die rechnerisch aufwendige Operation der Faltung geht über in die Multiplikation.

- Gebrochen rationale Funktionen bestehen aus einem Zähler- und einem Nennerpolynom. Aus der Lage der Wurzeln (Nullstellen) dieser Polynome lassen sich Eigenschaften digitaler Systeme ableiten, insbesondere sind dadurch Aussagen über die Stabilität möglich.

- Die $z-$Transformation hat für diskrete Systeme dieselbe Bedeutung wie die Laplace-Transformation für kontinuierliche Systeme.

Zur Beschreibung von Systemen werden je nach Aufgabenstellung unterschiedliche Darstellungen gewählt:

Der *Zeitbereich* ist der Bereich der »wirklichen« Signale, er wird durch Differenzengleichungen beschrieben und von der Impulsantwort $h[n]$ und Faltung $y[n] = h[n] * x[n]$ regiert.

Der *Frequenzbereich* ist der Bereich der »Töne« – der Spektren – wird durch Polynome beschrieben und vom Frequenzgang $H(\omega)$ und der Multiplikation $Y[\omega] = H(\omega)X[\omega]$ regiert.

Der **Frequenzbereich** ist **im z-Bereich enthalten**.

Der $z-$*Bereich* ist eine abstrakte Welt, die durch Pole und Nullstellen beschrieben und von der Systemfunktion $H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)}$ regiert wird. Im $z-$Bereich wird $x[n] = z^n$ als Eingangsgröße gewählt, wobei z eine beliebige komplexe Zahl und daher auch $z = e^{j\hat{\omega}}$ sein kann. Wir wir sehen werden »liegt« der Frequenzbereich daher im $z-$Bereich und ist ein Sonderfall des $z-$Bereichs. Dennoch wird zwischen den beiden Bereichen unterschieden, da sie unterschiedlichen Charakter haben.

1.1 Der $z-$Bereich

Die Systemeigenschaften im $z-$Bereich ermitteln wir wieder über die Beziehung zwischen Eingangs- und Ausgangssignal

$$y[n] = \sum_{k=0}^{M} b_k x[n-k] = \sum_{k=0}^{M} b_k z^{[n-k]} = \left(\sum_{k=0}^{M} b_k z^{-k} \right) z^n \tag{1.2}$$

Die Funktion

$$H(z) = \sum_{k=0}^{M} b_k z^{-k} = \sum_{k=0}^{M} h[k] z^{-k} \tag{1.3}$$

nennt man Systemfunktion. Für die Impulsfunktion erhalten wir die wichtige Beziehung

$$h[n] = \sum_{k=0}^{M} b_k \delta_0[n-k] \Leftrightarrow H(z) = \sum_{k=0}^{M} b_k z^{-k} \tag{1.4}$$

Die **Systemfunktion** eines digitalen Systems ist die **z-Transformierte** seiner **Impulsantwort**.

Bemerkung 1 *Die Systemfunktion $H(z)$ ist die z-Transformierte der Impulsantwort $h[n]$.*

Als Beispiel berechnen wir die Systemfunktion des FIR-Tiefpasses mit den Koeffizienten $b_k = [1, 2, 1]$

$$\begin{aligned} H(z) &= b_0 z^{-0} + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2} = 1 + 2z^{-1} + 1z^{-2} = && (1.5) \\ &= 1 + \frac{2}{z} + \frac{1}{z^2} = \frac{z^2 + 2z + 1}{z^2} = \frac{Y(z)}{X(z)} && (1.6) \end{aligned}$$

Die Systemfunktion ist eine gebrochen rationale Funktion mit dem Zählerpolynom $Y(z) = z^2 + 2z + 1$ und dem Nennerpolynom $X(z) = z^2$.
Durch die $z-$Transformation wird aus der Differenzengleichung

$$\begin{aligned} h[n] &= b_0\delta_0[n] + b_1\delta_0[n-1] + b_2\delta_0[n-2] \\ h[n] &\Longrightarrow H(z) \\ \delta_0[n] &\Rightarrow 1 \\ \delta_0[n-1] &\Rightarrow z^{-1}, \quad \delta_0[n-2] \Rightarrow z^{-2} \end{aligned}$$

die gebrochen rationale Funktion

$$H(z) = \frac{z^2 + 2z + 1}{z^2}$$

Für die $z-$Transformierte der Eingangsfolge $x[n]$ erhalten wir

$$x[n] = \sum_{k=0}^{N} x[k]\delta_0[n-k] \Leftrightarrow X(z) = \sum_{k=0}^{M} x[k]z^{-k} \tag{1.7}$$

Die Eingangsfolge $x[n] = [1, 2, 3, -1, 2, -3]$ hat die $z-$Transformierte

$$X(z) = 1 + 2z^{-1} + 3z^{-2} - 1z^{-3} + 2z^{-4} - 3z^{-5}.$$

Die $z-$Transformierte des Einheitsimpulses ist

$$\delta_0[n] \Leftrightarrow 1 \tag{1.8}$$

1.2 Eigenschaften der $z-$Transformation

Die $z-$Transformation ist eine lineare Transformation und es gilt

Die **z-Transformation** ist **linear**.

$$ax_1[n] + bx_2[n] \Leftrightarrow aX_1(z) + bX_2(z) \tag{1.9}$$

Die Multiplikation einer Folge mit z^{-1} verschiebt die Folge um einen Schritt, wie das folgende Beispiel zeigt

$$\begin{aligned} X(z) &= z^{-1}\left(1 + 2z^{-1} + 3z^{-2} - 1z^{-3} + 2z^{-4} - 3z^{-5}\right) = && (1.10) \\ &= 0z^0 + 1z^{-1} + 2z^{-2} + 3z^{-3} - 1z^{-4} + 2z^{-5} - 3z^{-6} && (1.11) \end{aligned}$$

Diesen Zusammenhang können wir anschreiben (Verschiebung im Zeitbereich)

Die **Verschiebung im Originalbereich** entspricht einer **Multiplikation mit** z^{-1} im **z-Bereich**

$$x[n-1] \Leftrightarrow z^{-1}X(z) \tag{1.12}$$

Für eine Verzögerung um n_0 Punkte erhalten wir

$$x[n-n_0] \Leftrightarrow z^{-n_0}X(z) \tag{1.13}$$

Wie wir wissen, sind für die Realisierung von digitalen Filtern Verzögerungsglieder (Speicher) erforderlich. Die Abbildung 1.1 zeigt eine Realisierung. Die

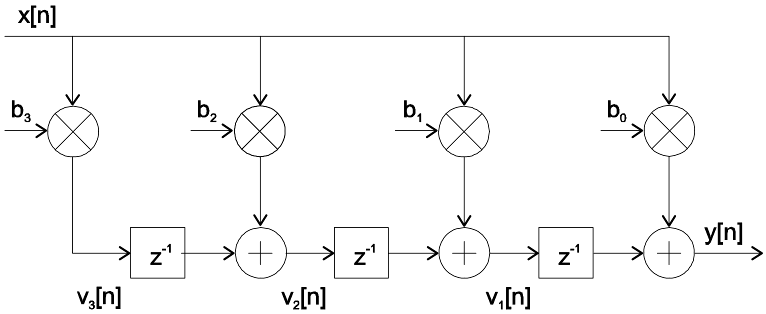

Abbildung 1.1: Darstellung mit z^{-1}

Eigenschaft (1.12) der $z-$Transformation wird in Blockdiagrammen häufig zur Kennzeichnung der Verzögerungsglieder verwendet, wie Abbildung 1.1 zeigt.

Streng genommen ist diese Darstellung nicht korrekt, da im Blockdiagramm die Zeitbereichnotation $x[n]$ und die $z-$Bereichnotation z^{-1} in einer gemeinsamen Darstellung verwendet wird. Dennoch ist diese Darstellung gebräuchlich.

Die Impulsantwort eines Verzögerungselements ist nichts anderes als die Verschiebung des Impulses um einen Schritt in der Folge.

$$h[n] = \delta_0[n-1] \tag{1.14}$$

Die Verzögerung um einen Schritt berechnet man im Zeitbereich durch Faltung des Eingangssignals mit der Impulsantwort

$$y[n] = x[n] * h[n] = x[n] * \delta_0[n-1] = x[n-1] \tag{1.15}$$

Im $z-$Bereich erhalten wir für das Verzögerungselement:

$$Y(z) = z^{-1}X(z) \tag{1.16}$$

Der Verschiebung im Zeitbereich um n_o entspricht die Multiplikation mit z^{-n_o} im $z-$Bereich.

Im Allgemeinen gilt

$$y[n] = x[n] * h[n] = \sum_{k=0}^{M} h[k]x[n-k]. \tag{1.17}$$

Eine **Faltung** im **Originalbereich** wird durch die z-Transformation zu einer **Multiplikation** im **z-Bereich**.

Die $z-$Transformation ist eine lineare Transformation, es gilt daher der Überlagerungsatz und wir können schreiben

$$Y(z) = \sum_{k=0}^{M} h[k]\left(z^{-k}X(z)\right) = \left(\sum_{k=0}^{M} h[k]z^{-k}\right)X(z) = H(z)X(z) \tag{1.18}$$

Der Faltung im Zeitbereich entspricht die Multiplikation im Frequenzbereich.

$$y[n] = h[n] * x[n] \Leftrightarrow Y(z) = H(z)X(z) \tag{1.19}$$

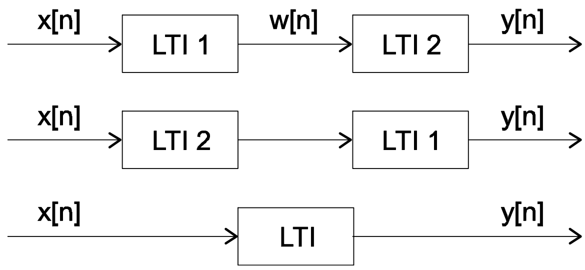

Abbildung 1.2: Reihenfolge der Kaskadierung

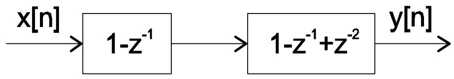

Abbildung 1.3: Faktorisierung von Systemen

1.3 Blockdiagramme und Systemfunktion

Aus (1.17) und der Kommutativität der Faltung folgt, dass die Systemfunktion zweier kaskadierter System $H(z) = H_1(z)H_2(z) = H_2(z)H_1(z)$ ist. Die Reihenfolge der Kaskadierung ist ohne Belang, wie Abbildung 1.2 zeigt.

Polynome können durch Aufspalten in ihre Wurzeln (Nullstellen) in Polynome niedrigerer Ordnung zerlegt werden. Wir betrachten die Systemfunktion

Mit Hilfe der **Nullstellendarstellung** der Systemfunktion $H(z)$ können **große Systeme** aus **kleineren Teilsystemen** zusammengesetzt werden.

$$H(z) = 1 - 2z^{-1} + 2z^{-2} - z^{-3} \tag{1.20}$$

(1.20) hat eine Wurzel bei $z = 1$ und kann daher zerlegt werden in:

$$H(z) = (1 - z^{-1})(1 - z^{-1} + z^{-2}) \tag{1.21}$$

Das System 3. Ordnung lässt sich durch Faktorisierung in ein System 1.Ordnung und ein System 2.Ordnung aufspalten, wie Abbildung 1.3 zeigt.

1.4 Inverse Filterung

Signale werden beim Durchgang durch Übertragungskanäle beeinflusst und in vielen Fällen möchte man diese Signaländerung aufheben, um das Orginalsignal wieder herzustellen. Dazu muss man aus dem Ausgangssignal und der Impulsantwort das Eingangssignal ermitteln. Diese Aufgabenstellung nennt man inverse Filterung oder Deconvolution. Die Gleichung $y[n] = h[n] * x[n]$ muss nach $x[n]$ aufgelöst werden.

Die inverse Filterung kann in der Zeitbereichdarstellung in der Regel nicht gelöst werden. Im $z-$Bereich kann man schreiben:

Bei der **inversen Filterung** werden **Signalverzerrungen** »**rückgängig** gemacht«.

$$Y(z) = H_1(z)H_2(z)X(z) = H(z)X(z) = X(z) \tag{1.22}$$

$H_1(z)$ ist der Übertragungskanal, $H_2(z)$ ist das korrigierende System. Um das ursprüngliche Signal wieder herzustellen muss gelten:

$$H_1(z)H_2(z) = 1 \tag{1.23}$$

Beispiel 2 *Als praktisches Beispiel der inversen Filterung soll die Nachbearbeitung (digitalisierter) alter Schallplattenaufnahmen betrachtet werden. Alte Aufnahmen wurden mit primitiven Aufnahmesystemen durchgeführt, die die Signale verzerrten. Die Entzerrung kann gemacht werden, wenn die Impulsantwort des ursprünglichen Systems bekannt ist. Leider ist das in der Regel nicht der Fall und man muss die Impulsantwort des Aufnahmesystems annehmen und durch Experimente ein akzeptables Signal wiederherstellen.*

Beispiel 3 *Das folgende Beispiel erläutert die mathematischen Zusammenhänge:*

$$H_1(z) = (1 - z^{-1} + 0.5z^{-2}) \tag{1.24}$$

$$H_2(z) = \frac{1}{H_1(z)} = \frac{1}{(1 - z^{-1} + 0.5z^{-2})} = \tag{1.25}$$

$$= \frac{z^2}{z^2 - z + 0.5} \tag{1.26}$$

H_2 hebt die Wirkung von H_1 auf, die Systemfunktion des inversen Filters H_2 ist eine gebrochen rationale Funktion. Die Systemfunktion von FIR-Filtern hat immer die Form

$$H_{FIR}(z) = \frac{b_n z^n + b_{n-1} z^{n-1} + ... + b_1 z + b_0}{z^n} \tag{1.27}$$

Die Wirkung eines FIR-Filters kann durch ein nachgeschaltetes FIR-Filter nicht mehr behoben werden.

Das FIR-Filter in unserem Beispiel kann also nicht durch ein FIR-Filter invertiert werden. Wir werden im Kapitel über IIR-Filter eine Lösung für dieses Problem finden.

1.5 Zusammenhang $z-$Bereich und Frequenzbereich

Für die Darstellung der Eigenschaften eines digitalen Systems haben wir folgende Beziehungen gefunden:

$$z - Bereich \quad \Leftrightarrow \quad \hat{\omega} - Bereich$$

$$H(z) = \sum_{k=0}^{M} b_k z^{-k} \quad \Leftrightarrow \quad H(\hat{\omega}) = \sum_{k=0}^{M} b_k e^{-j\hat{\omega}k}$$

Im $z-$Bereich kann z beliebige Werte annehmen, also auch die Werte $z = e^{j\hat{\omega}}$. Setzen wir in $H(z)$ für $z = e^{j\hat{\omega}}$ ein dann wird aus $H(z)|_{z=e^{j\hat{\omega}}} = H(\hat{\omega})$.

$z = e^{j\hat{\omega}}$ hat den Betrag $|z| = 1$ und die Punkte von z liegen daher in der komplexen Ebene auf dem Kreis mit dem Radius $|z| = 1$ und dem Winkel $\angle z = \hat{\omega}$. Abbildung (1.4) stellt diesen Zusammenhang grafisch dar.

Man gelangt vom z-Bereich zum Frequenzbereich, indem man für $z = e^{j\hat{\omega}}$ wählt.

Über jedem Punkt der komplexen Ebene ist der zugehörige Wert von $H(z)$ – bzw. von $H(\hat{\omega})$ wenn z auf dem Einheitskreis liegt – aufgetragen. Die Funktionswerte sind im Allgemeinen komplexe Werte. Trägt man über der komplexen

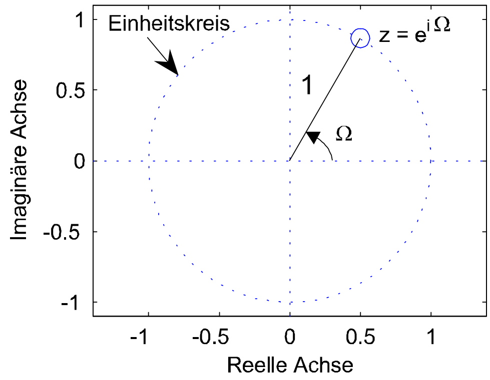

Abbildung 1.4: Einheitskreis in der komplexen Ebene

Ebene z den Betrag von $|H(z)|$ auf, dann erhält man ein »Gebirge« in axonometrischer Darstellung. Denkt man sich über dem Einheitskreis einen Zylinder, so gibt der Schnitt des Zylinders mit dem »Gebirge« den Verlauf des Betrags des Frequenzgangs. Schneidet man den Zylinder der Länge nach auf und rollt ihn ab, so erhält man die bekannte Darstellung des Frequenzgangs.

Der **Frequenzgang** befindet sich in der z-Ebene **über dem Einheitskreis**.

Beispiel 4 *Das folgende Beispiel in Abbildung 1.5 stellt den Betrag der Funktion $H(z) = \frac{1}{1-0.9z^{-1}}$ dar. Diese Funktion wird an der Stelle $z = 0.9$ Null, $H(z)$ wird daher an dieser Stelle unendlich. (In der Zeichnung ist die Unendlichkeitsstelle abgeschnitten.) Der Schnitt des Zylinders über dem Einheitskreis mit $H(z)$ ist in Abbildung 1.5 dick gezeichnet, in Abbildung 1.6 ist nur der Zylinder gezeigt.*

Beispiel 5 *Schneidet man den Zylinder in Abbildung 1.6 auf und rollt ihn ab, so erhalt man die bekannte Darstellung des Frequenzgangs. In Abbildung 1.7 ist nur die Hälfte des »Zylinders« (0 bis π) gezeichnet.*

1.5.1 Pole und Nullstellen von $H(z)$

Die Systemfunktion eines diskreten LTI-Systems ist im Allgemeinen eine gebrochen rationale Funktion der Form:

$$H(z) = \frac{b_0 z + b_1 z + b_2 z^2 + ... + b_m z^m}{a_0 z + a_1 z + a_2 z^2 + ... + a_n z^n} = \frac{Y(z)}{X(z)} \tag{1.28}$$

Nullstellen des **Zählerpolynoms** von $H(z)$ entsprechen den **Nullstellen** von $H(z)$. Nullstellen des **Nennerpolynoms** heißen **Polstellen** von $H(z)$.

Die Nullstellen des Zählerpolynoms $Y(z)$ nennt man Nullstellen von $H(z)$. An den Nullstellen des Nennerpolynoms $X(z)$ wird $H(z) \to \infty$, diese Punkte nennt man Polstellen von $H(z)$.

Durch die Lage der Pole und Nullstellen ist die Systemfunktion bis auf einen konstanten Faktor eindeutig dargestellt. Die grafische Darstellung von Polen und Nullstellen nennt man Pol-/Nullstellendarstellung. Nullstellen werden als Kreise, Polstellen als Kreuze dargestellt.

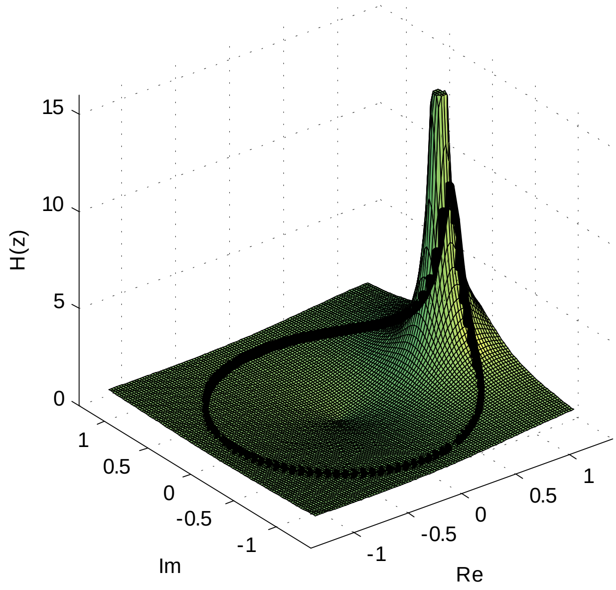

Abbildung 1.5: Betrag von $H(z) = \frac{1}{1-0.9z^{-1}}$

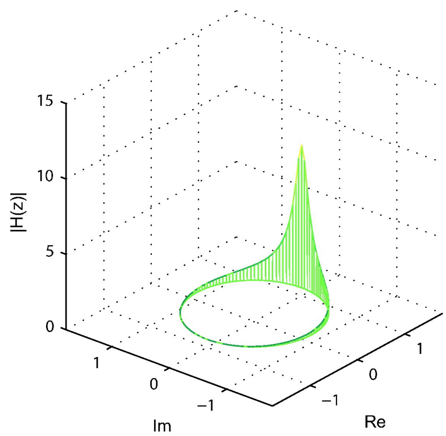

Abbildung 1.6: Zylinder über Einheitskreis

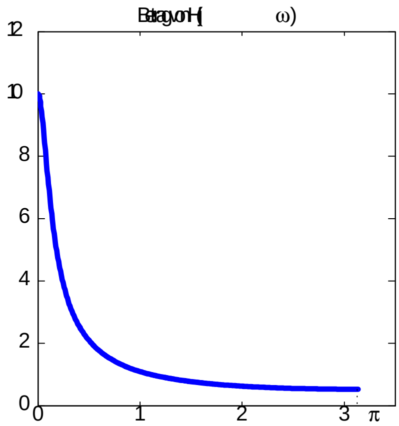

Abbildung 1.7: Betrag des Frequenzgangs von $H(z) = \frac{1}{1-0.9z^{-1}}|_{z=j\omega}$

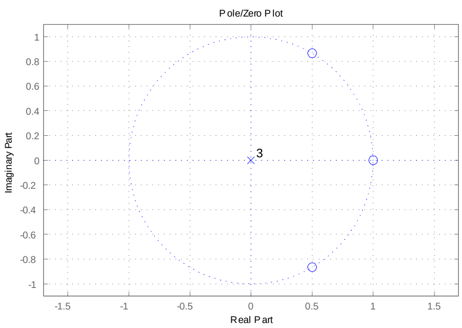

Abbildung 1.8: Pol-/Nullstellen-Darstellung

Beispiel 6 *Als Beispiel ist das PN-Diagramm der Systemfunktion*

$$H(z) = 1 - 2z^{-1} + 2z^{-2} - z^{-3} = \frac{z^3 - 2z^2 + 2z - 1}{z^3}$$

in Abbildung 1.8 dargestellt. Es wurde mit den folgenden Matlab-Befehlen erzeugt:
$B = [1, -2, 2, -1]$; $A = [1]$; $zplane(B, A)$

Die Nullstellen des Zählers liegen bei

$$\begin{aligned} z^3 - 2z^2 + 2z - 1 &= (z-1)(z - e^{j\pi/3})(z - e^{-j\pi/3}) = 0 \\ z_0 &= 1, e^{\pm j\pi/3} \end{aligned}$$

Die Polstellen (Nullstellen des Nenners) $z^3 = 0$ *liegen (dreifach) im Nullpunkt. Bei FIR-Filtern liegen die Polstellen* immer *im Nullpunkt. Bei LTI-Systemen* *nach (1.28) treten die Pole in allgemeiner Lage auf, wir werden den Einfluss der Pole auf das Systemverhalten im Abschnitt über IIR-Filter kennenlernen.*

Durch die **Pol- und Nullstellen** ist die **Systemfunktion** bis auf einen konstanten Faktor **eindeutig bestimmt**.

Nullstellen auf dem Einheitskreis bedeuten, dass die zugehörige Frequenzkomponente am Ausgang des Systems nicht auftritt, also vollständig unterdrückt wird. Erinnerung: $H(z) = 0$ für ein z auf dem Einheitskreis $\iff H(\hat{\omega}) = 0$ für die entsprechende normierte Kreisfrequenz $\hat{\omega}$.

1.6 Zusammenfassung

Durch die z-Transformation werden Funktionen vom Zeitbereich ($n-$Bereich) in den Bildbereich ($z-$Bereich) abgebildet. Durch diese Abbildung werden aus Differenzengleichungen im $n-$Bereich Polynome im $z-$Bereich. Wie wir im Kapitel über die IIR-Filter noch sehen werden, können Differenzengleichungen in den $z-$Bereich transformiert werden, dort als algebraische Gleichungen gelöst werden und stellen nach Rücktransformation in den $n-$Bereich die Lösung der Differenzengleichungen im Orginalbereich dar. Dadurch gelangt man zu einer systematischen Lösung der Differenzengleichungen. Die häufig vorkommenden Transformationsbeziehungen zwischen $n-$ und $z-$Bereich gibt es in Tabellenform, was die Rechnung erheblich erleichtert.

Die Polynome im $z-$Bereich bzw. die Lage der Pole und Nullstellen gibt Aufschluss über das Verhalten der Systemfunktion[1].

Eine Bewegung auf dem Einheitskreis von 0 bis $\pm\pi$ entspricht dem Durchlaufen der (komplexen) Frequenz von $0 \leq \hat{\omega} \leq \omega_G$. Da es sich um abgetastete Systeme handelt, ist die höchste Frequenz $\omega_G = 0.5\omega_{\text{abtast}}$.[2] Für $z = e^{j\hat{\omega}}$ wird aus der Darstellung im $z-$Bereich die Darstellung im Frequenzbereich. Nullstellen auf dem Einheitskreis entsprechen also Nullstellen der Übertragungsfunktion.[3]

[1] Für stabile zeit-diskrete Systeme müssen die Polstellen innerhalb des Einheitskreises liegen, wie wir bei den IIR-Filtern sehen werden. Bei zeit-kontinuierlichen System müssen die Pole in der linken offenen Halbebene des $s-$Bereichs liegen.

[2] Der Bewegung auf dem Einheitskreis entspricht bei zeit-kontinuierlichen Systemen die Bewegung auf der imaginären Achse von 0 bis $\pm j\infty$ in der $s-$Ebene.

[3] Entsprechend liegen bei zeit-kontiniuerlichen Systemen die Übertragungsnullstellen auf der imaginären Achse.