

Abtasttheorem

Abtastung

$$x[n] = x(nT_s) = A \cos(\omega n T_s + \varphi) = A \cos(\hat{\omega} n + \varphi)$$

Normalisierte Kreisfrequenz

$$\hat{\omega} = \omega T_s$$

Normalisierte Kreisfrequenz

ω hat die Einheit rad/sec, $\hat{\omega} = \omega T$ hat die Einheit rad,
d.h. **$\hat{\omega}$ ist eine dimensionslose Größe!**

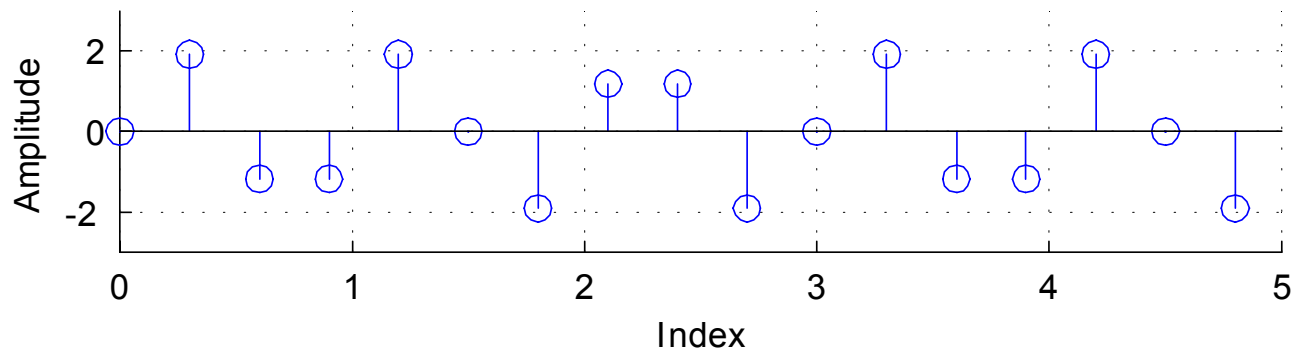
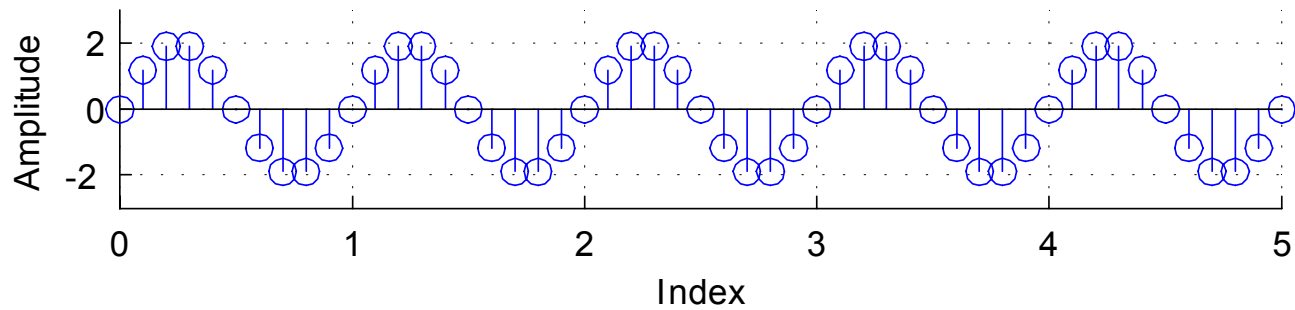
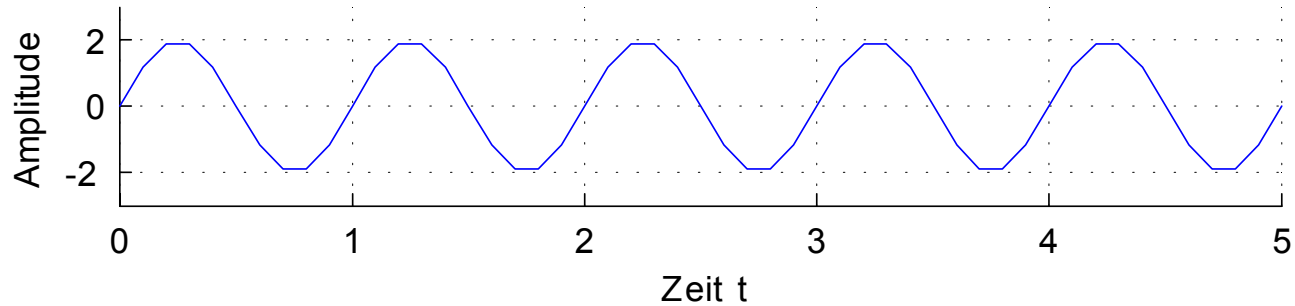
Nachdem $x(t)$ abgetastet wurde, geht die Zeitachse verloren.

Das zeitdiskrete Signal ist lediglich eine Folge von Zahlen,
diese Folge hat keine Information über die Abtastperiode.

Zur Rekonstruktion in den Zeitbereich muß die
Abtastfrequenz bekannt sein!

In anderen Worten: **Eine unendliche Anzahl von kontinuierlichen Sinussignalen kann in die identische diskrete Sinusdarstellung transformiert werden.**

Anzahl der Abtastpunkte



Darstellung der Abtastung

Signals $f(t)$ wird einer Folge von Einheitsimpulsen $\delta_T(t)$ im Abstand von T Sekunden (dem Abtastabstand) multipliziert.

$$f_S(t) = f(t)\delta_T(t) = \sum_k f(kT)\delta(t - kT)$$

Die Impulsfolge ist eine periodische Funktion und kann daher in eine Fourierreihe zerlegt werden.

$$\delta_T(t) = \frac{1}{T} [1 + 2 \cos \omega_s t + 2 \cos 2\omega_s t + 2 \cos 3\omega_s t + \dots + 2 \cos k\omega_s t] \quad (k \rightarrow \infty)$$

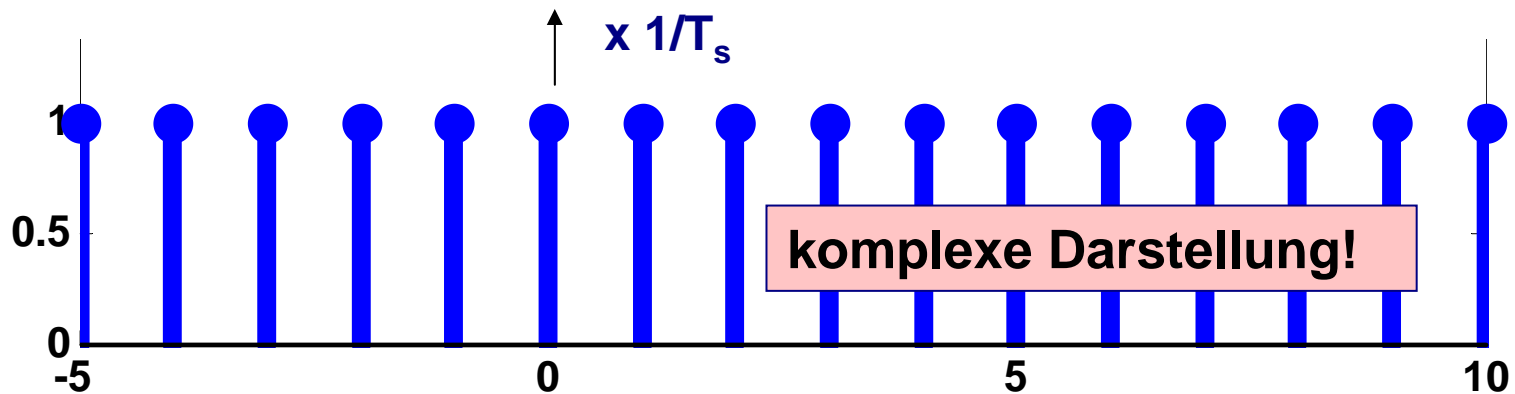
$$D_k = \frac{1}{T_s} \int_{-T_s/2}^{T_s/2} \delta_T(t) e^{-jk\omega_s t} dt = \frac{1}{T_s}$$

$$\delta_T(t) = \frac{1}{T_s} \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{jk\omega_s t} \quad \omega_s = \frac{2\pi}{T_s}$$

$$\delta_T(t) = \frac{1}{T_s} [1 + 2 \cos \omega_s t + 2 \cos 2\omega_s t + 2 \cos 3\omega_s t + \dots + 2k \cos k\omega_s t]$$

(reelle Darstellung!)

($k \rightarrow \infty$)



Abgetastetes Signal

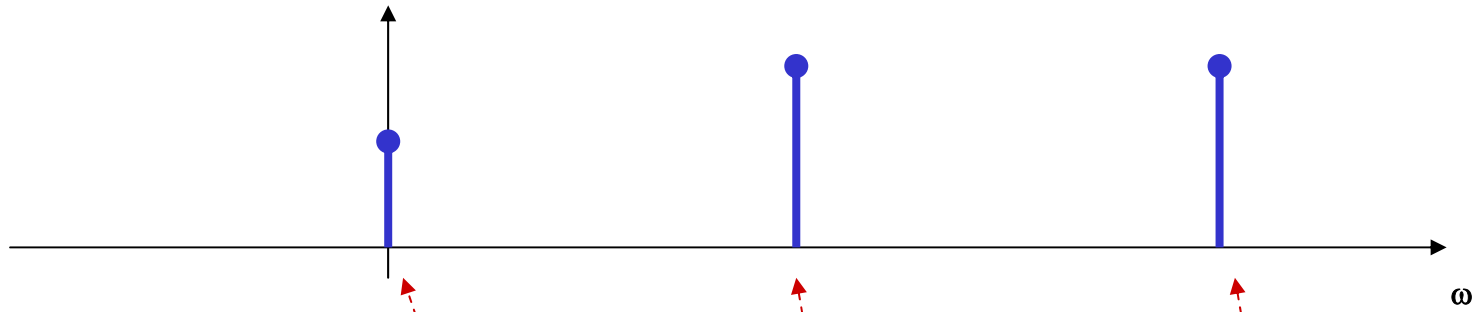
$$f_S(t) = f(t)\delta_T(t) = \frac{1}{T} [f(t) + 2f(t)\cos\omega_s t + 2f(t)\cos 2\omega_s t + \dots]$$

$$\cos(\omega_0 t) \cos(\omega_s t) = \frac{1}{2} [\cos(\omega_s + \omega_0)t + \cos(\omega_s - \omega_0)t]$$

Aus jeder Spektralkomponente entsteht

$$(\omega_s \pm \omega_0)$$

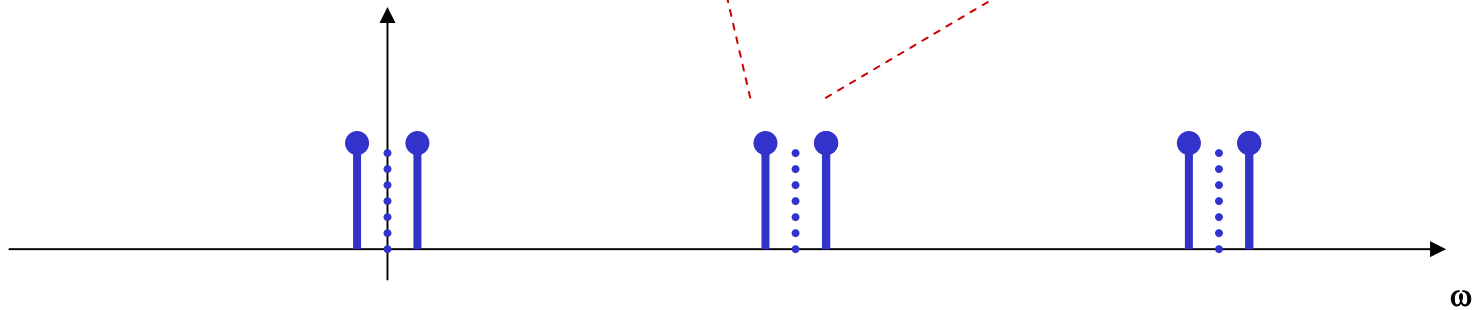
!



$$f_s(t) = f(t)\delta_T(t) = \frac{1}{T} [f(t) \cos 0t + 2f(t) \cos \omega_s t + 2f(t) \cos 2\omega_s t + \dots]$$

z.B.: $f(t) = \cos \omega_0 t$

$$\cos(\omega_0 t) \cos(\omega_s t) = \frac{1}{2} [\cos(\omega_s - \omega_0)t + \cos(\omega_s + \omega_0)t]$$



Spektrum des abgetasteten Signals

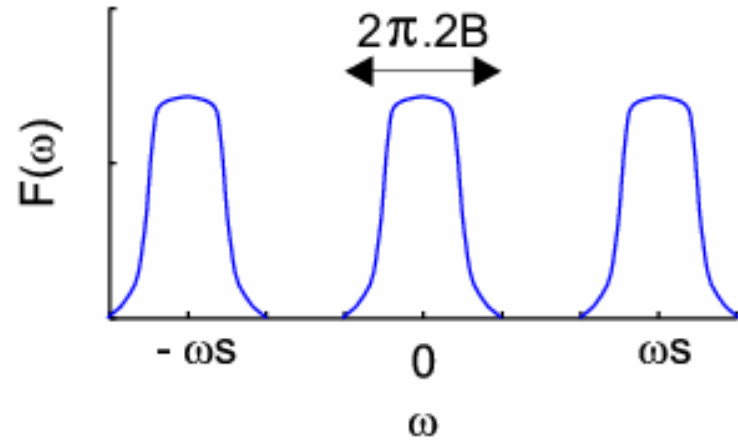
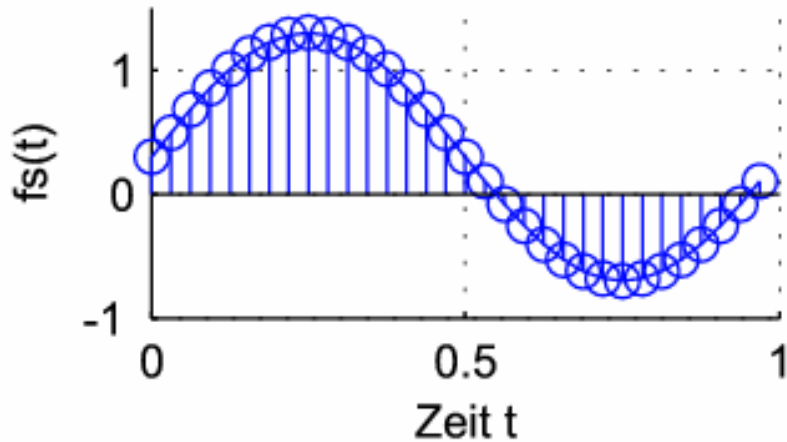
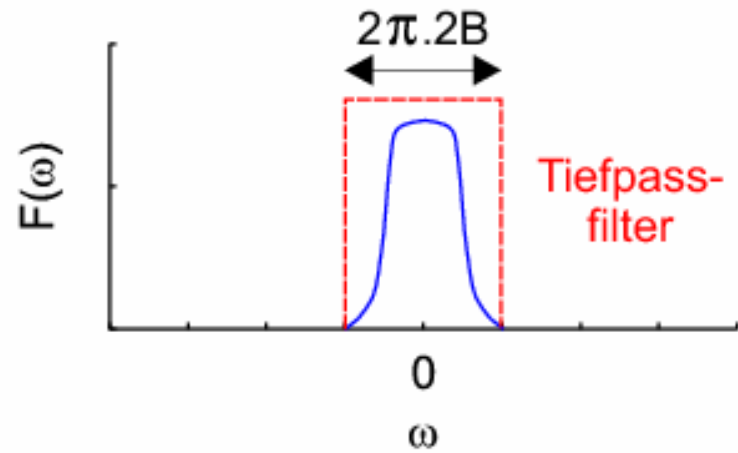
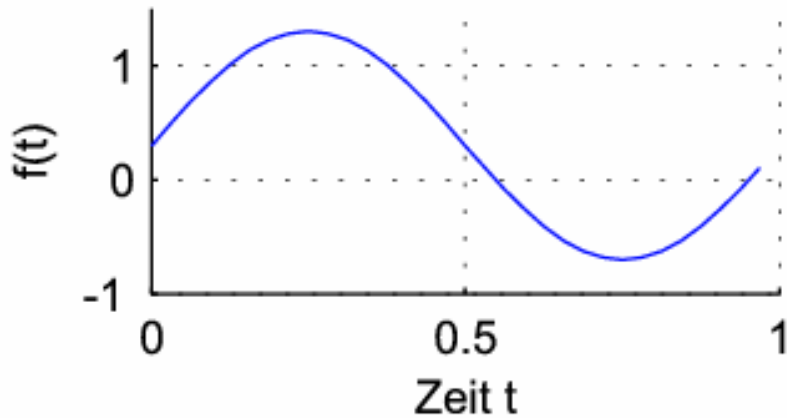
$$f(t) \Leftrightarrow F(\omega)$$

$$f(t) \cos \omega_s t \Leftrightarrow \frac{1}{2} [F(\omega - \omega_s) + F(\omega + \omega_s)]$$

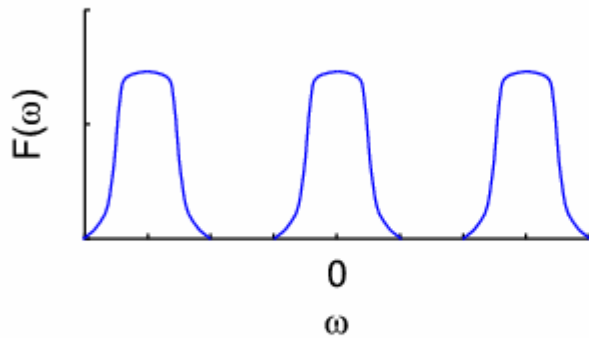
$$F(\omega); F(\omega - 2\omega_s), F(\omega + 2\omega_s); F(\omega - 3\omega_s), F(\omega + 3\omega_s); \dots$$

$$F_s(\omega) = \frac{1}{T_s} \sum_{n=-\infty}^{\infty} F(\omega - n\omega_s)$$

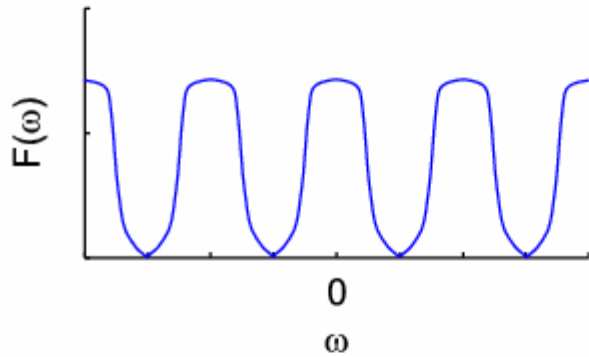
Das Spektrum des abgetasteten Signals setzt sich periodisch im Abstand ω_s fort.



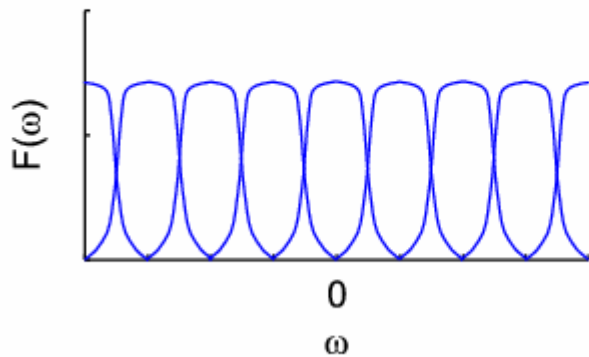
Das Spektrum des Originalsignals $f(t)$ ist im Spektrum des abgetasteten Signals $f_s(t)$ enthalten und kann aus $F_s(\omega)$ durch "Herausschneiden" mit einem idealen Tiefpassfilter *fehlerfrei* wieder hergestellt werden.



$$\omega_s > 2\pi \cdot 2B$$



$$\omega_s = 2\pi \cdot 2B$$



$$\omega_s < 2\pi \cdot 2B$$

Abstand der
Spektren hängt
von der
Abtastfrequenz ab.

Shannon Sampling Theorem

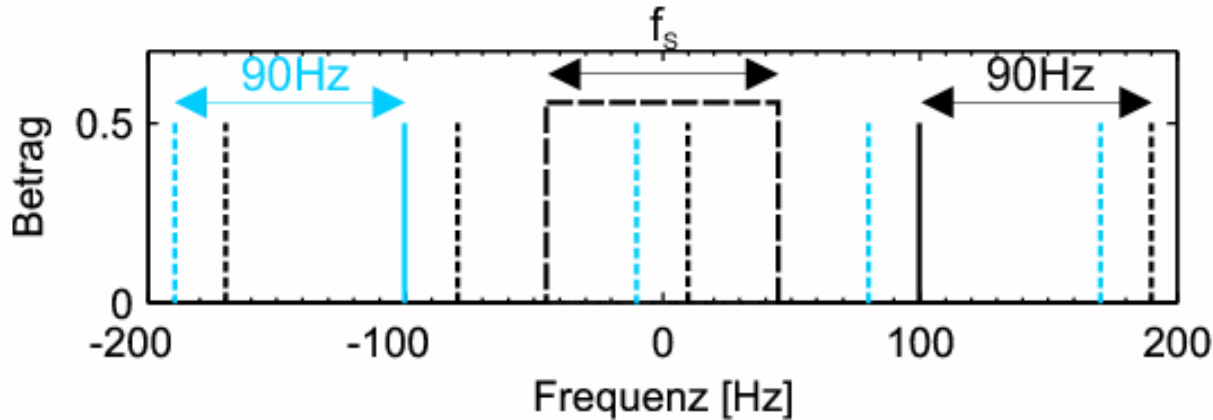
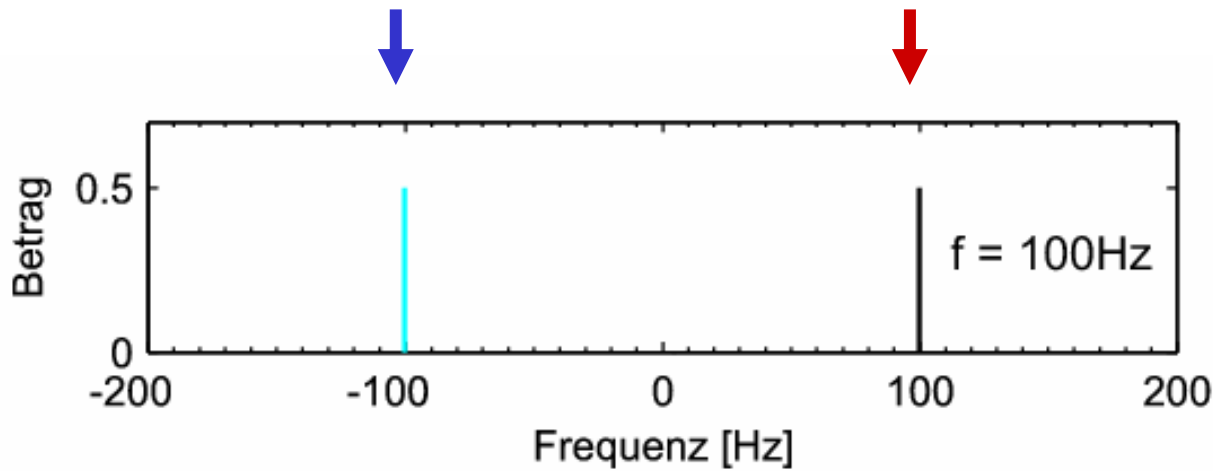
Ein kontinuierliches Zeitsignal $x(t)$ mit Frequenzen $\leq f_{\max}$ kann exakt von den Abtastwerten $x[n] = x(nT_s)$ rekonstruiert werden, wenn die Abtastrate $f_s = 1/T_s$ größer als $2 f_{\max}$ ist.

Spektrum der abgetasteten Sinusfunktion

Abtastfrequenz = 90 Hz

-100 Hz periodisch fortgesetzt

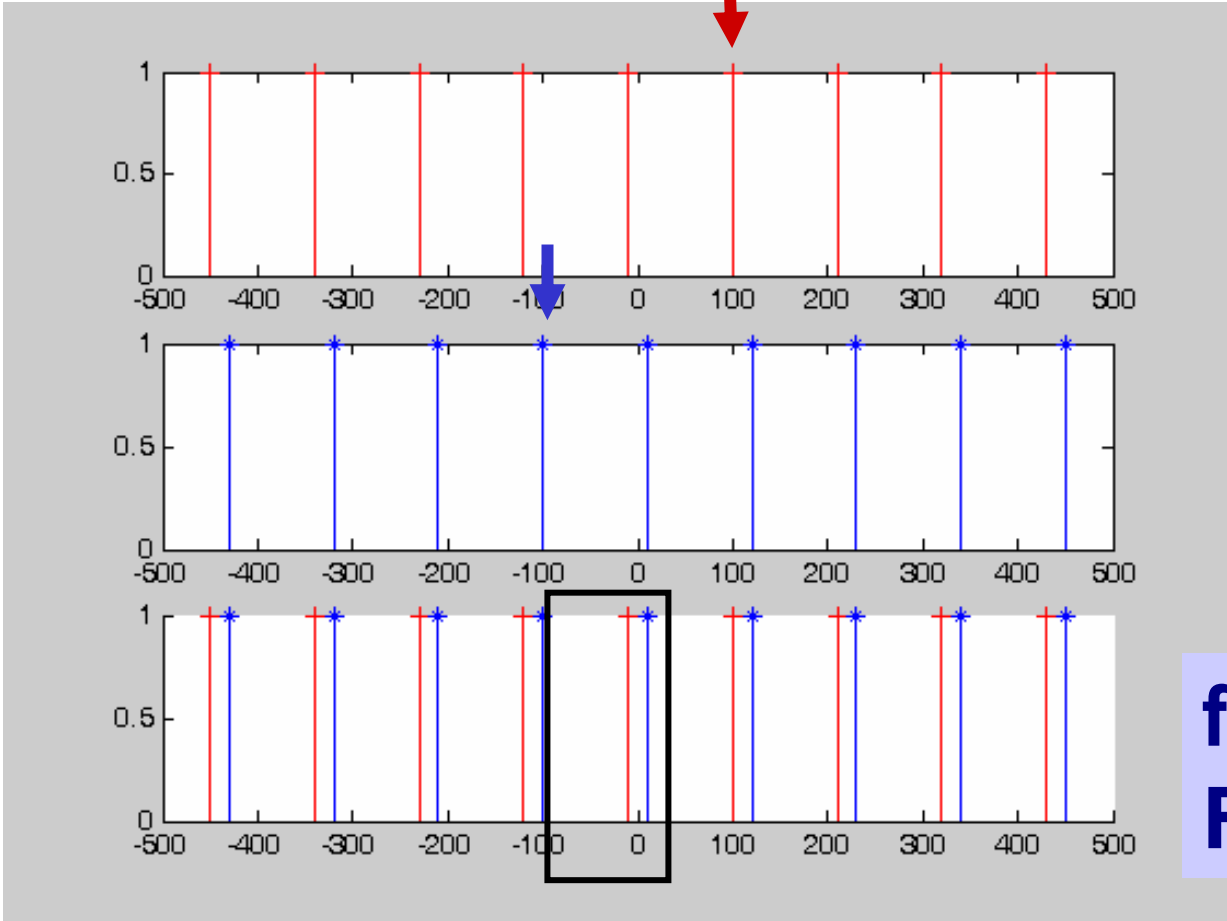
100 Hz periodisch fortgesetzt



f = 10 Hz !
Aliasing

Abtastfrequenz = 110 Hz

100 Hz periodisch fortgesetzt

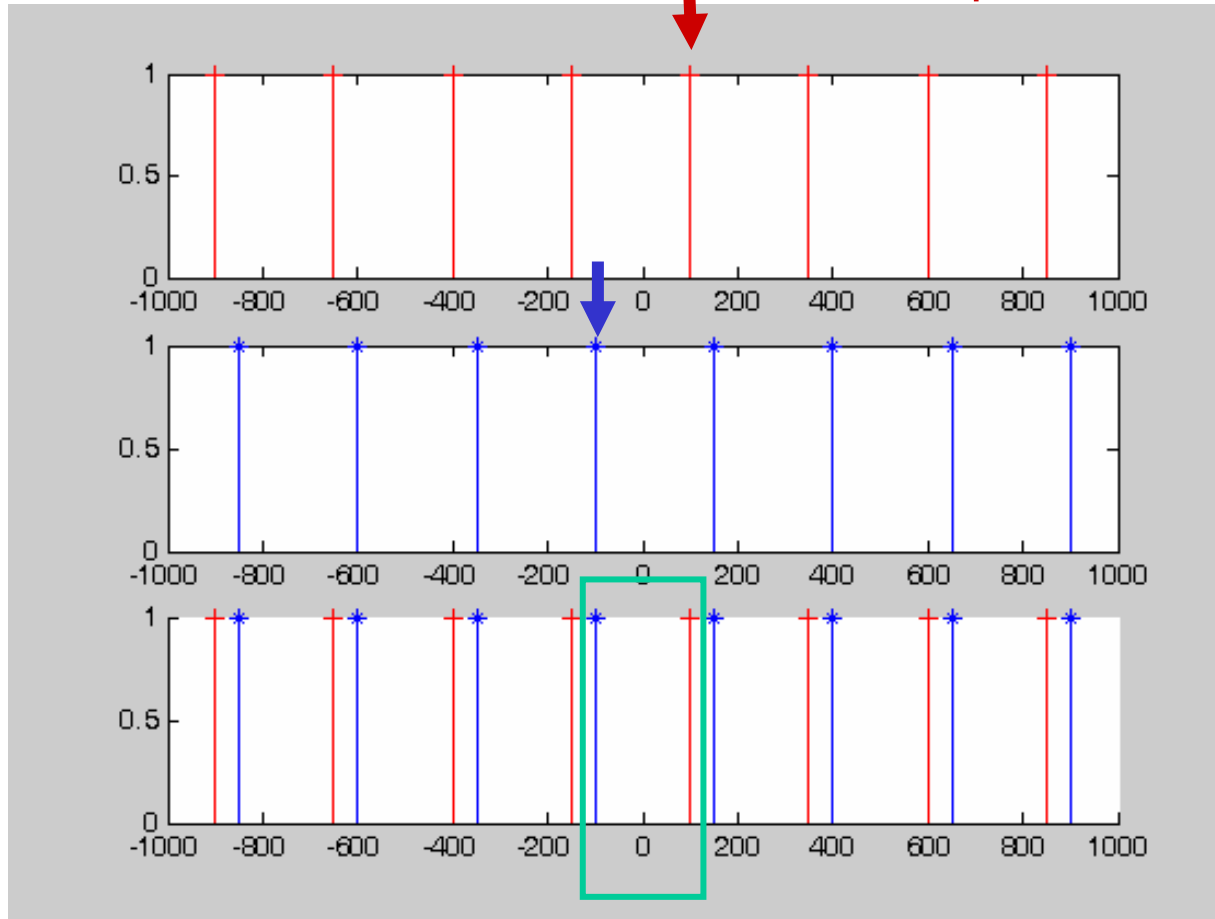


-100 Hz periodisch fortgesetzt

f = -10 Hz !
Folding

Abtastfrequenz = 250 Hz

100 Hz periodisch fortgesetzt



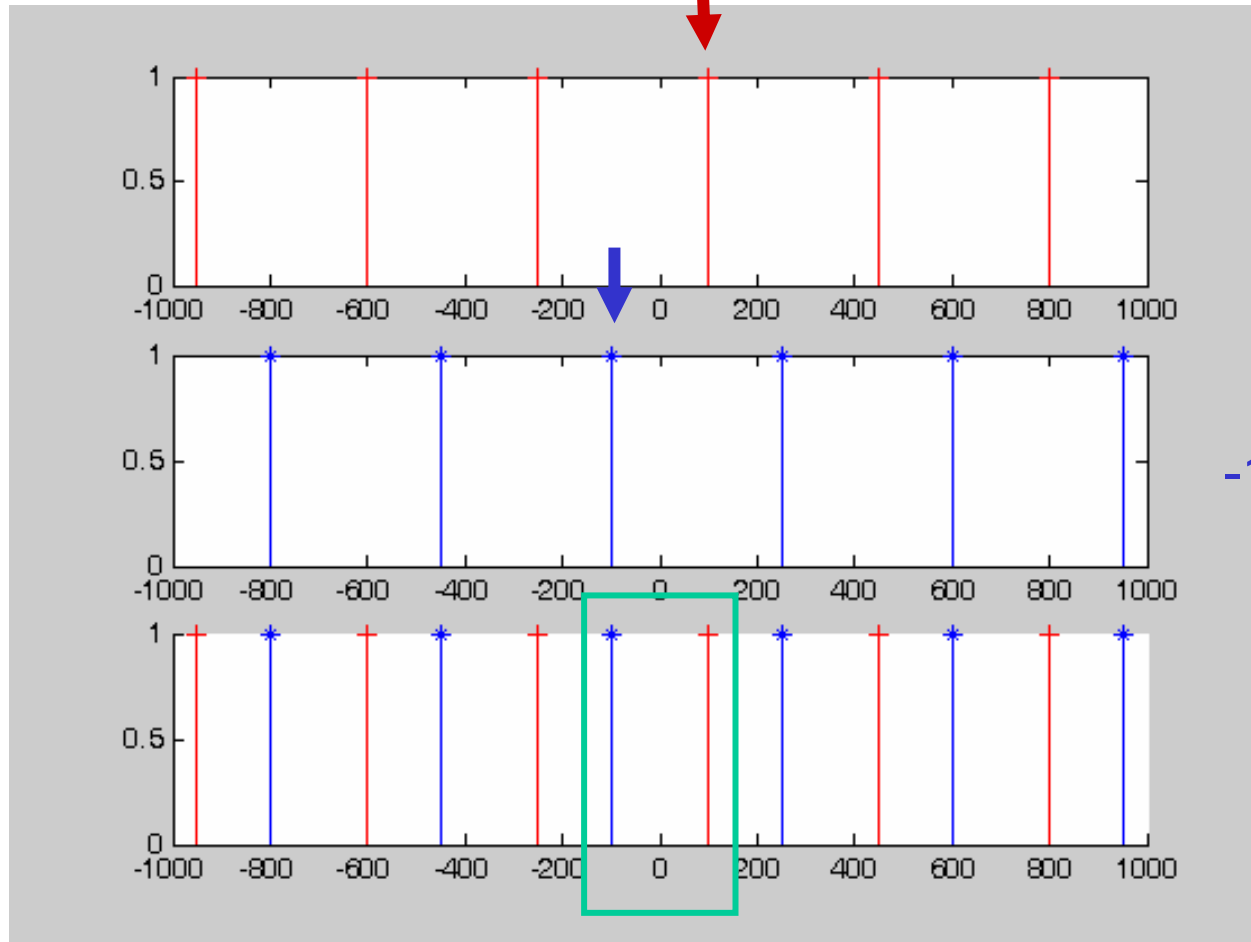
-100 Hz periodisch fortgesetzt

f = 100 Hz

Selektivität des Filters

Abtastfrequenz = 350 Hz

100 Hz periodisch fortgesetzt



-100 Hz

**Selektivität des Filters
kann geringer sein.**

Aliasing (1)

$x(t) = A \cos(2\pi f_0 t + \phi)$ liefert das abgetastete Signal

$$x[n] = x(nT_s) = A \cos(2\pi f_0 nT_s + \phi)$$

Wir betrachten eine zweite cos-Funktion mit der selben Amplitude und Phase, aber mit der Frequenz

$$f_0 + lf_s \quad l \text{ ist eine Ganzzahl und } f_s = 1/T_s$$

$$y(t) = A \cos(2\pi(f_0 + lf_s)t + \phi) \quad \text{bzw.}$$

$$\begin{aligned} y[n] &= y(nT_s) = A \cos(2\pi(f_0 + lf_s)nT_s + \phi) \\ &= A \cos(2\pi f_0 nT_s + 2\pi lf_s nT_s + \phi) \\ &= A \cos(2\pi f_0 nT_s + 2\pi l n + \phi) \\ &= A \cos(2\pi f_0 nT_s + \phi) = x[n] \end{aligned}$$

Aliasing (2)

$y[n]$ hat dieselben Abtastwerte wie $x[n]$ und ist daher von $x[n]$ nicht unterscheidbar !

l ist eine beliebige ganze Zahl, es gibt daher eine unendliche Zahl von Kosinusfunktionen, die alle dieselbe Folge haben wie $x[n]$. Die Frequenzen $f_o + lf_s$ nennt man Aliasfrequenzen von f_o für die Abtastfrequenz f_s .

Folding

Die zweite Ursache für Aliassignale kommt von negativen Frequenzkomponenten $-f_0 + lf_s$:

$$w(t) = A \cos(2\pi(-f_0 + lf_s)t - \phi) \quad \text{bzw.}$$

$$\begin{aligned} w[n] = w(nT_s) &= A \cos(2\pi(-f_0 + lf_s)nT_s - \phi) \\ &= A \cos(-2\pi f_0 T_s + 2\pi l f_s T_s + \phi) \\ &= A \cos(-2\pi f_0 T_s + 2\pi l - \phi) \\ &= A \cos(2\pi f_0 T_s + \phi) = x[n] \end{aligned}$$

Rekonstruktion/Interpolation

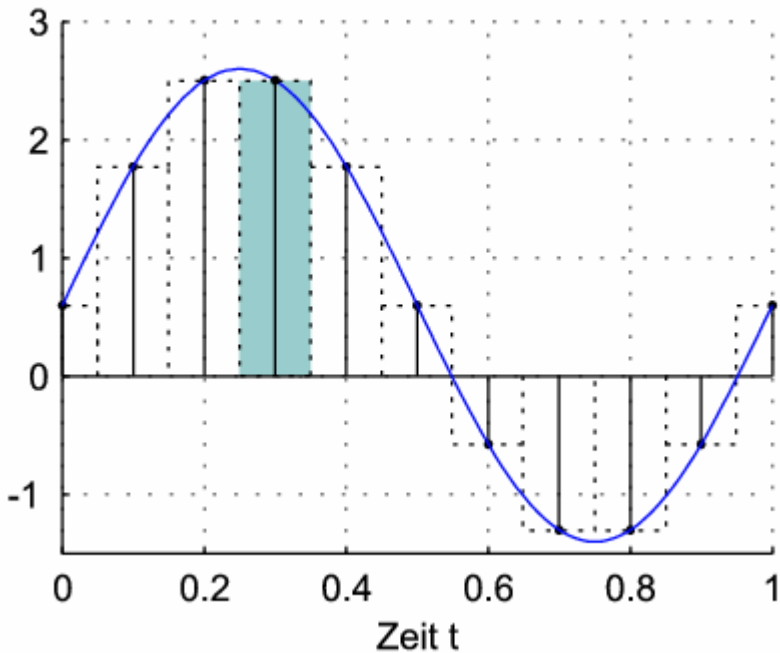
Umsetzung diskret \Rightarrow kontinuierlich

$$y(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} y[n]p(t - nT_s)$$

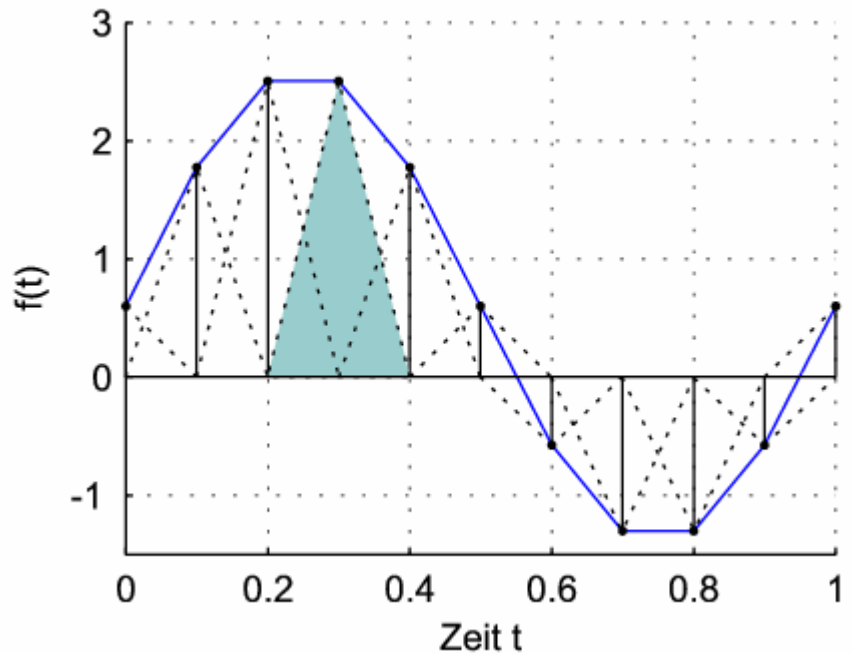
$p(t)$ charakteristische Impulsform des Konverters.

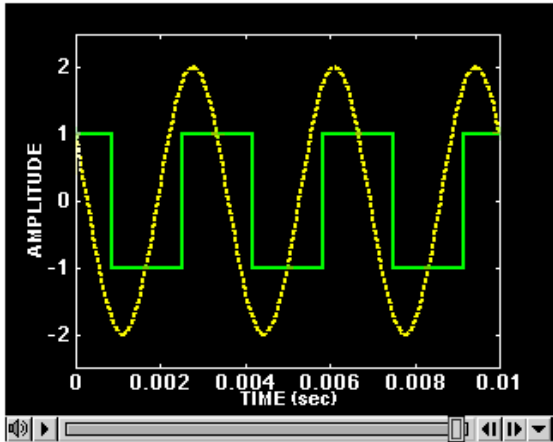
Interpolation im Zeitbereich

konstant

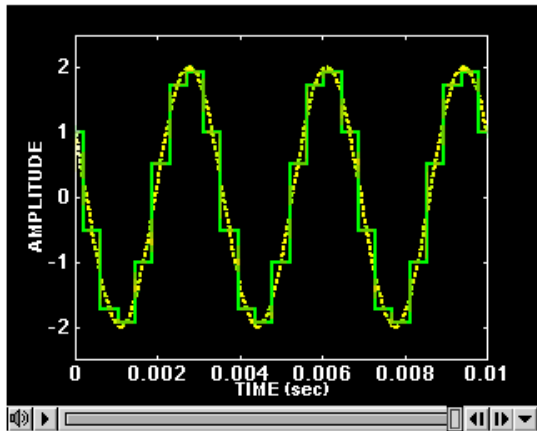
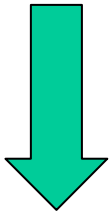
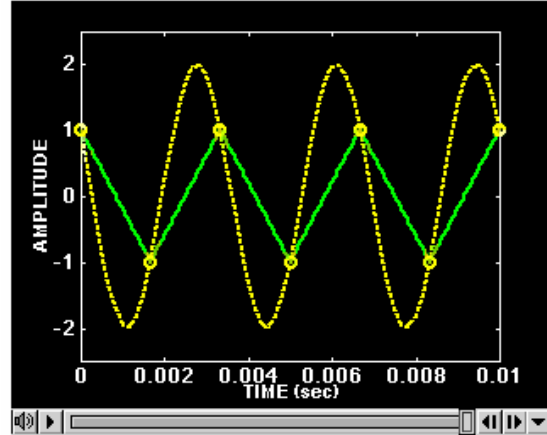


linear interpoliert

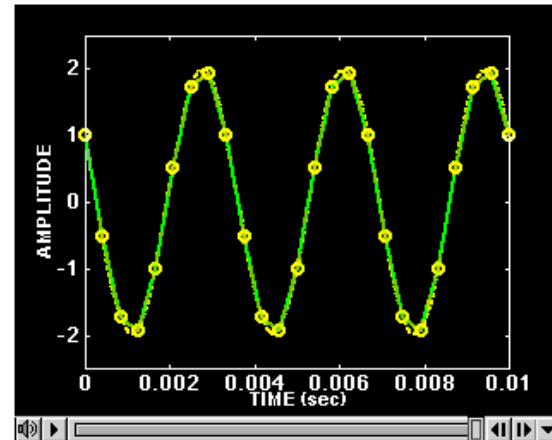




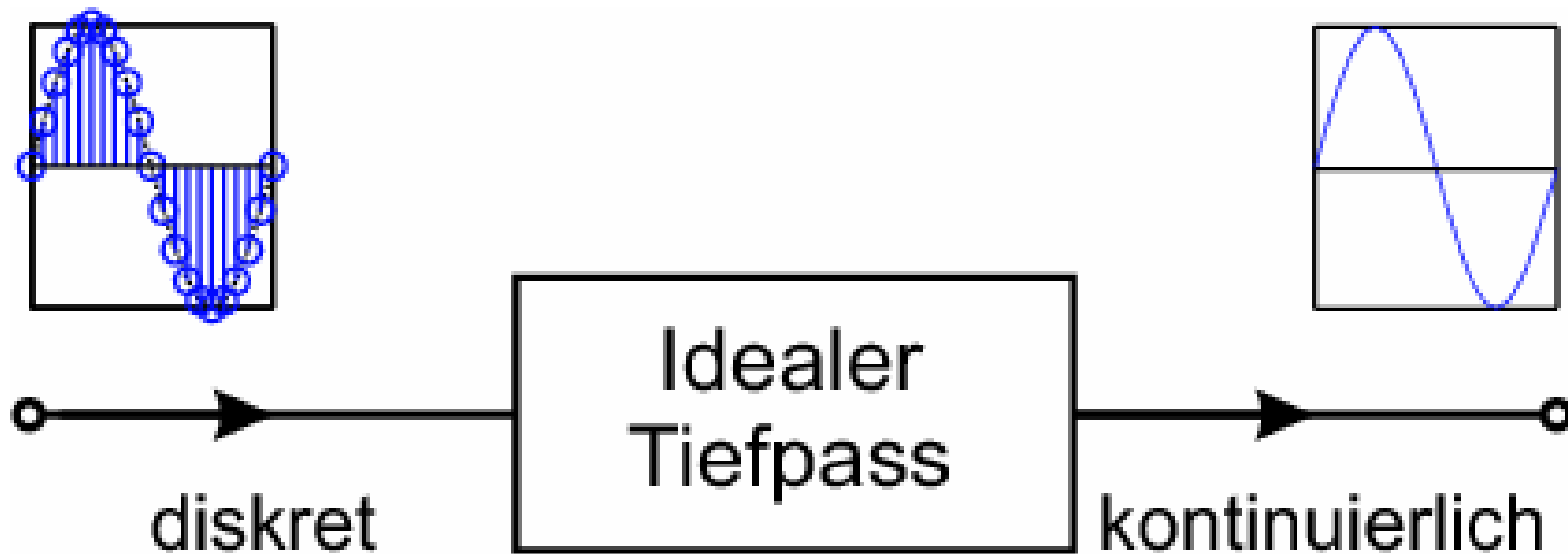
1 x



4 x



Interpolation im Frequenzbereich



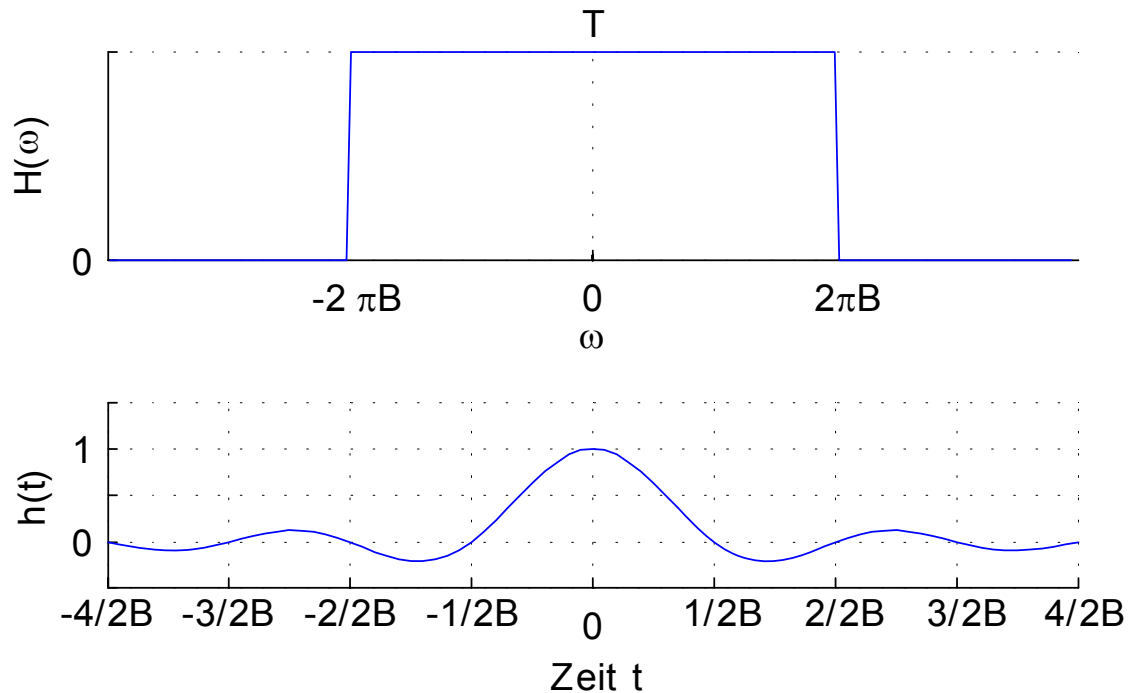
Ideale Filterung

- Um das Originalsignal aus dem periodischen Spektrum zu rekonstruieren, bedarf es eines Filters mit exakt rechteckigem Frequenzgang (ideales Filter)
- Das Eingangssignal des idealen Filters ist die Impulsfolge des abgetasteten Signals.
- Das Ausgangssignal ist die Überlagerung der zeitversetzten, gewichteten Impulsantworten.

Impulsantwort ideales Filter

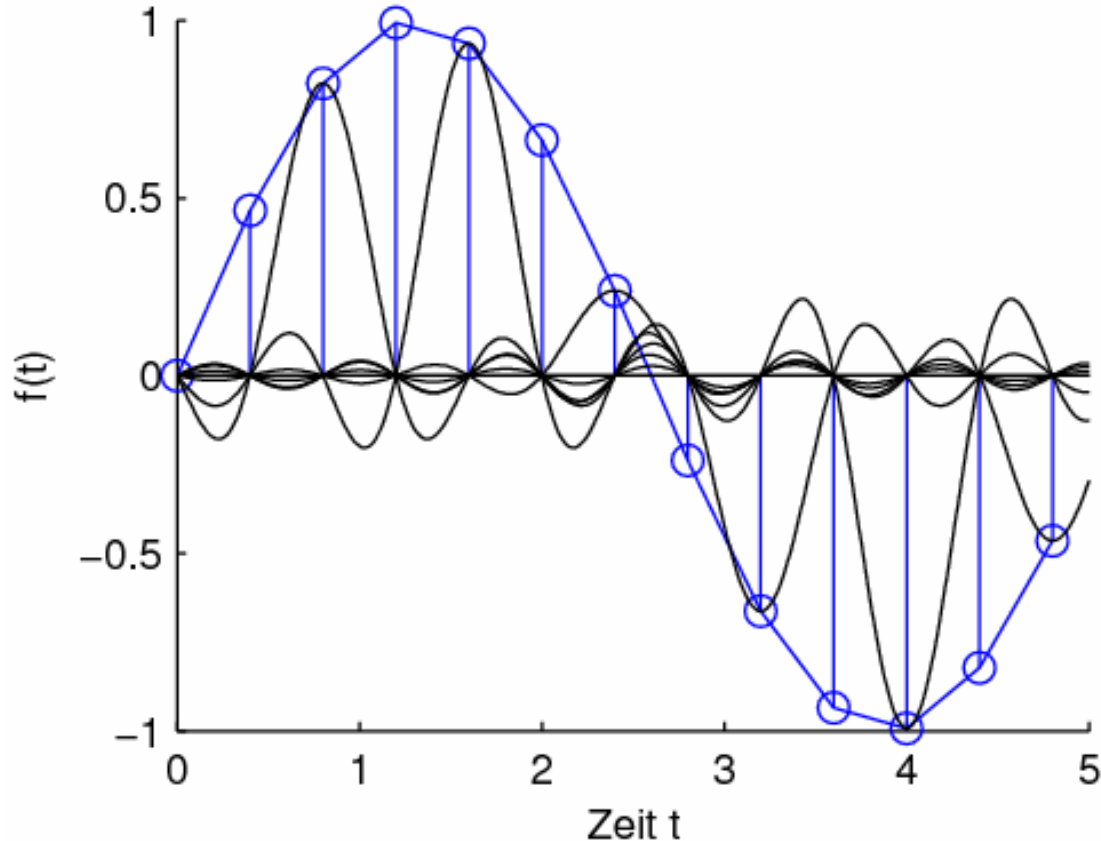
$$H(\omega) = \begin{cases} 1 & |\omega| < 2\pi B \\ 0 & |\omega| \geq 2\pi B \end{cases}$$

$$h(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-2\pi B}^{2\pi B} e^{j\omega t} d\omega = 2BT \operatorname{sinc}(2\pi Bt)$$



Das Ausgangssignal ist die Überlagerung der zeitversetzten, **gewichteten** Impulsantworten.

$$f(t) = \sum_k f(kT)h(t - kT) = \sum_k f(kT)\text{sinc}(2\pi Bt - k\pi)$$



Während die Rekonstruktion des Signal durch Rechteck- und Dreiecksimpulse nur eine ungenaue Wiedergewinnung des Signal ermöglichte, stellt die Rekonstruktion durch überlagerte und gewichtete sinc-Pulse das Signal fehlerfrei her.

Wie wir sehen, ist die Impulsantwort eines idealen Filters nicht-kausal, d.h. das Filter antwortet bereits **vor** dem Anlegen des Impulses.

Nichtkausale Filter sind nicht realisierbar!

Interpolationsfilter (1)

Ideale (analoge) Tiefpass-Filter sind nicht-kausal und daher nicht realisierbar. Eine praktische Lösung dieses Problems wird dadurch gefunden, dass das Signal mit Abtastfrequenzen größer als der Nyquist-Frequenz abgetastet wird.

Damit entstehen Lücken im periodisch fortgesetzten Spektrum und die Anforderungen an die Flankensteilheit des Filters werden geringer.

Interpolationsfilter (2)

Man kann zwar steilflankige analoge Filter mit hoher Dämpfung im Sperrbereich bauen, es ist aber nicht möglich Filter zu realisieren, die die Signale im gesamten Sperrbereich vollständig unterdrücken.

Man erreicht eine praktisch ausreichende Unterdrückung, aber nie die theoretische geforderte vollständige Ausblendung des Sperrbereichs.

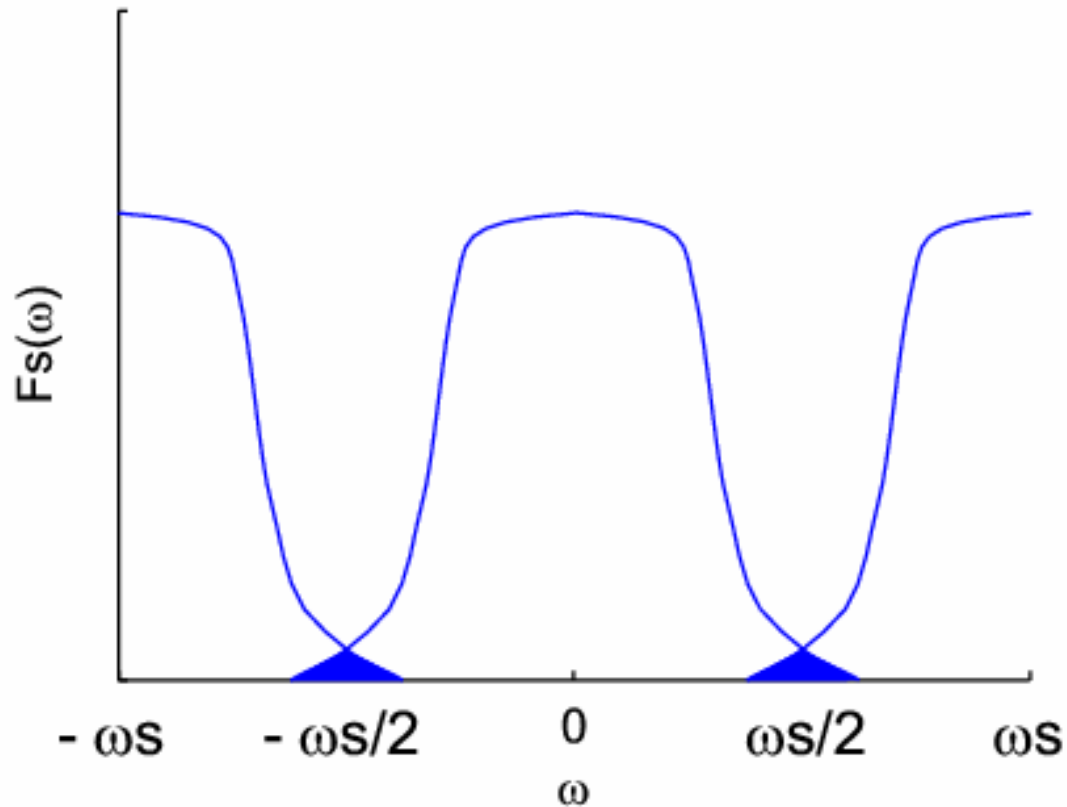
Jedes praktische Signal ist von endlicher Länge. Wie wir von der Fourier-Transformation wissen, hat ein Signal endlicher Länge ein unendlich breites Spektrum.

Kein Signal kann gleichzeitig zeitbegrenzt und bandbegrenzt sein!

Ist das Signal **zeitbegrenzt** (hat es also eine endliche Dauer), dann erstreckt sich das **Spektrum von $-\infty$ bis ∞** (ist also nicht bandbegrenzt).

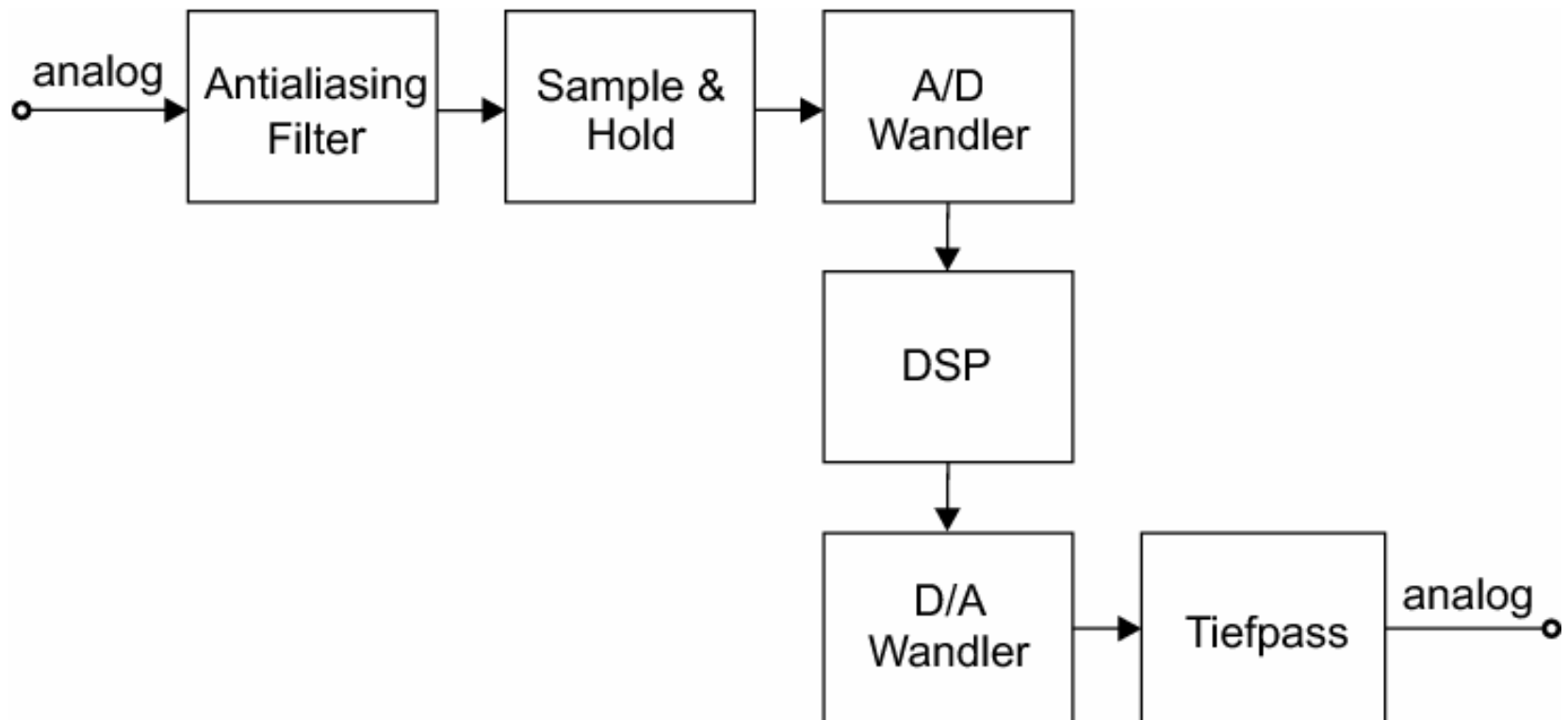
Ist das Signal **bandbegrenzt**, dann muss sich das Signal über eine unendliche Dauer im Zeitbereich erstrecken, ist also **nicht zeitbegrenzt**.

Überlappende Spektren



Antialiasing-Filter

Um das Überlappen von Spektren zu vermeiden wird die Bandbreite von Signalen mit Antialiasing-Filtern begrenzt.



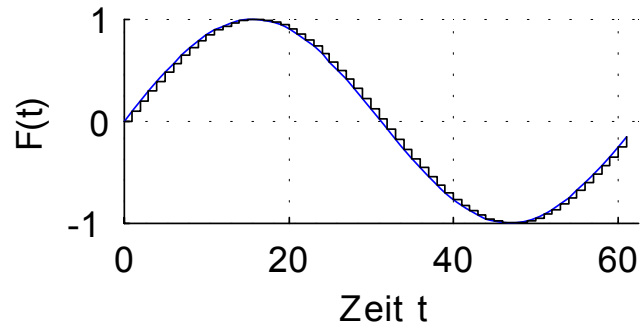
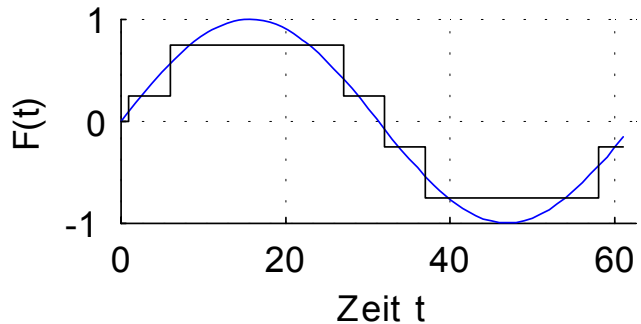
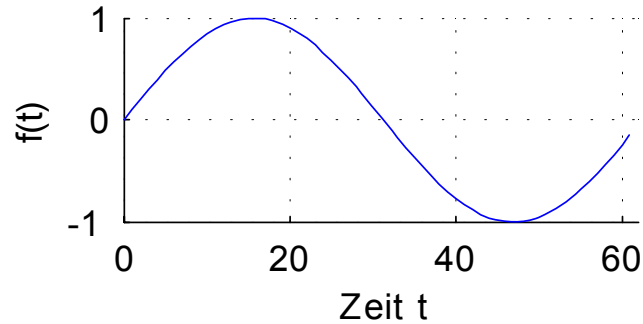
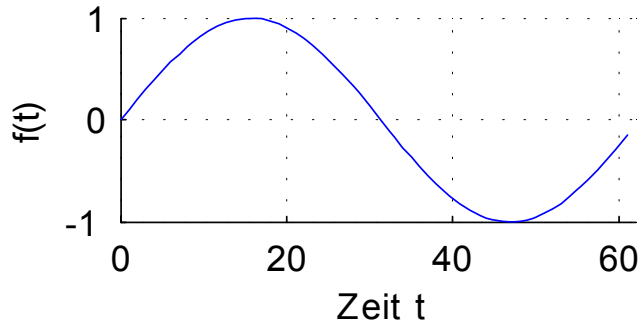
Digitalisierung

Die Auflösung des Analog-/Digital-Wandlers wird nach Qualitätskriterien ausgewählt.

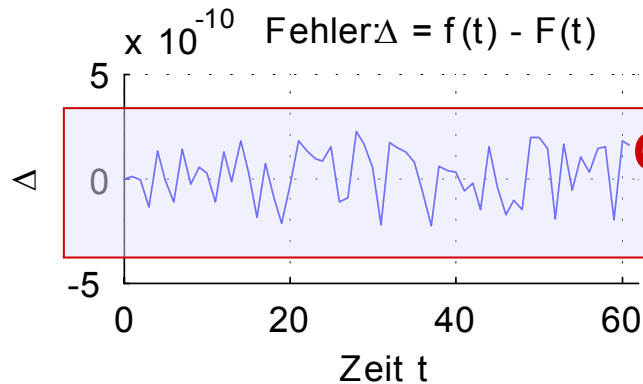
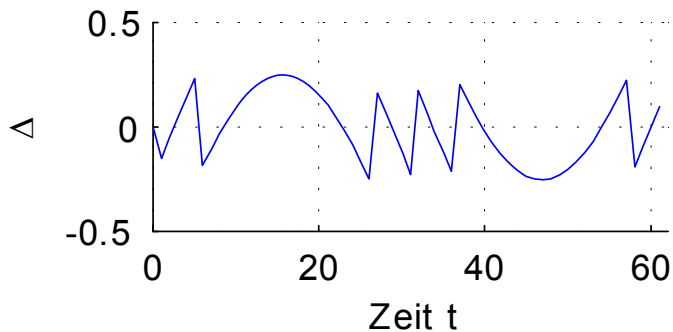
Für **Sprachsignale** reicht eine Auflösung von **8 bit** aus, bei Musiksignalen auf einer **Audio-CD** beträgt die Auflösung **16 bit**.

Je geringer die Auflösung des A/D-Wandlers ist, desto stärker weicht das digitale Signal vom analogen Signal ab.

Quantisierungsfehler



Fehler: $\Delta = f(t) - F(t)$



Quantisierungsrauschen (1)

Quantisierungsfehler $\Delta = \pm \frac{1}{2} LSB$

Bei gleichwahrscheinlichen Signalamplituden ist die mittlere Leistung des Fehlersignals (Rauschen)

$$e_{eff}^2 = \frac{1}{\Delta} \int_{-\Delta/2}^{\Delta/2} s^2 ds = \frac{\Delta}{12}$$
$$e_{eff} = \frac{\Delta}{\sqrt{12}} = \frac{LSB}{\sqrt{12}} \sim 0.29 LSB$$

8 bit: 1/900

12 bit: 1/14.000

16 bit: 1/226.000

des Wertebereichs

Quantisierungsrauschen (2)

```
[y,fs,nbits]=wavread('file.wav')  
sound(y,fs,6)           % Abspielen mit 6 bit  
  
wavwrite(a,fs,nbits,'wavefile.wav')  
nbits = 8, 16, 32 o. 64
```

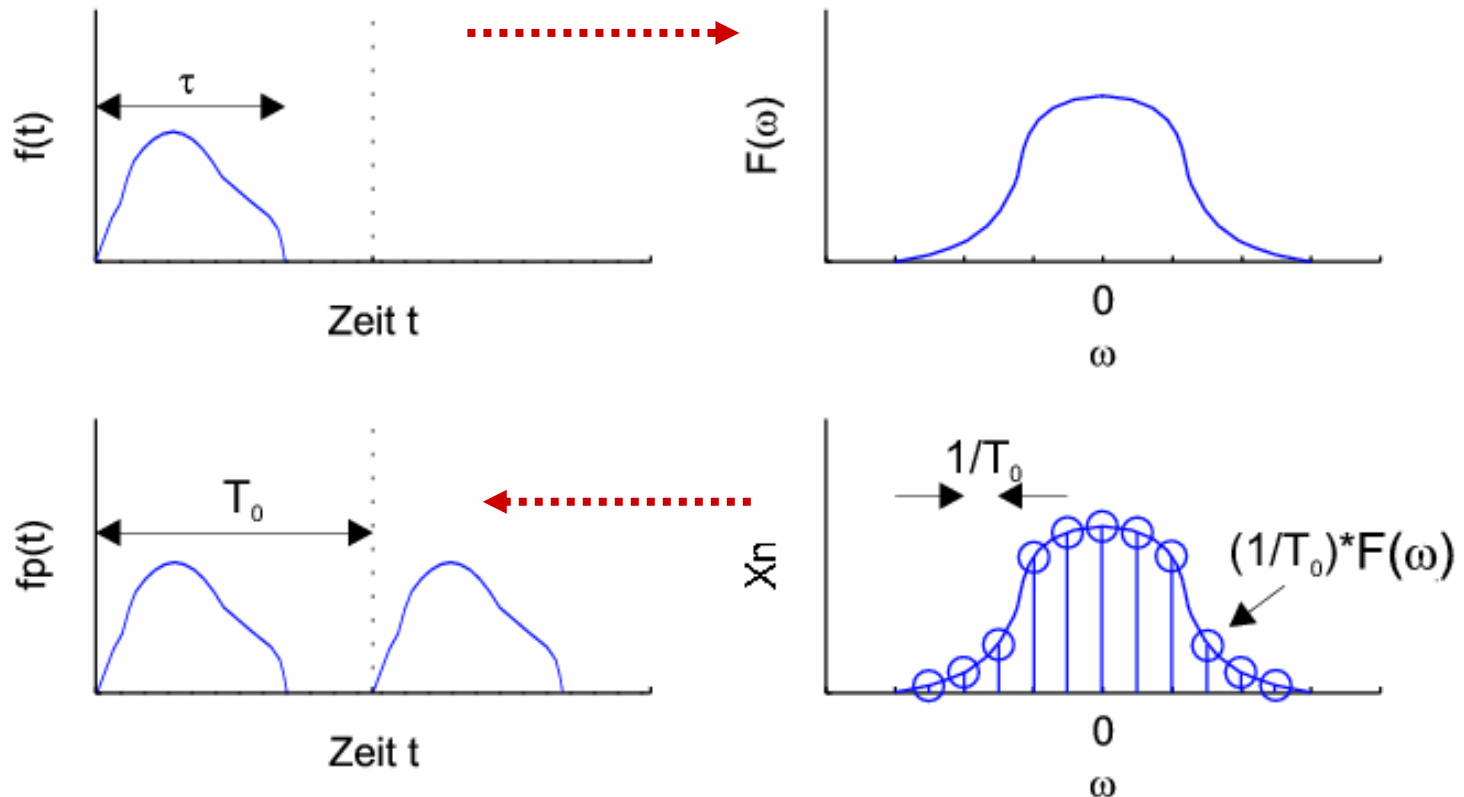
Abtastung im Frequenzbereich

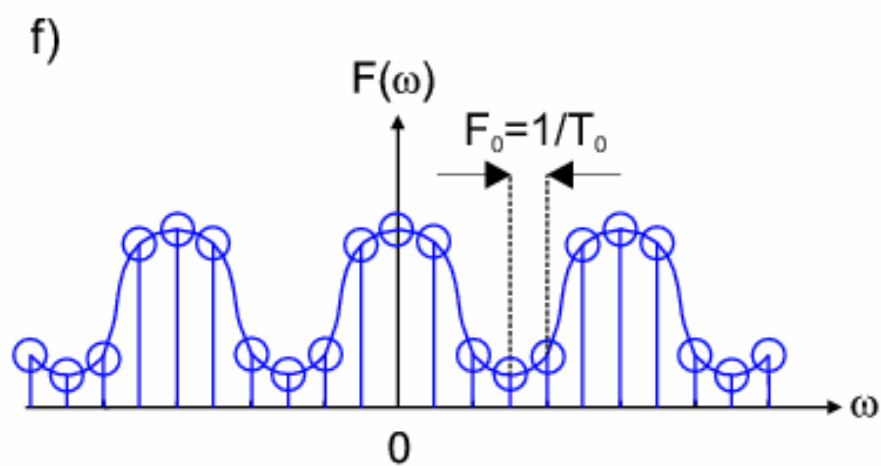
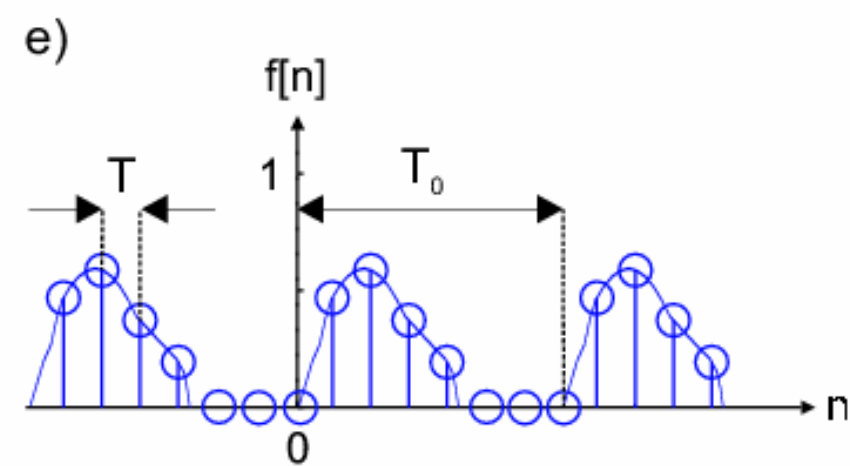
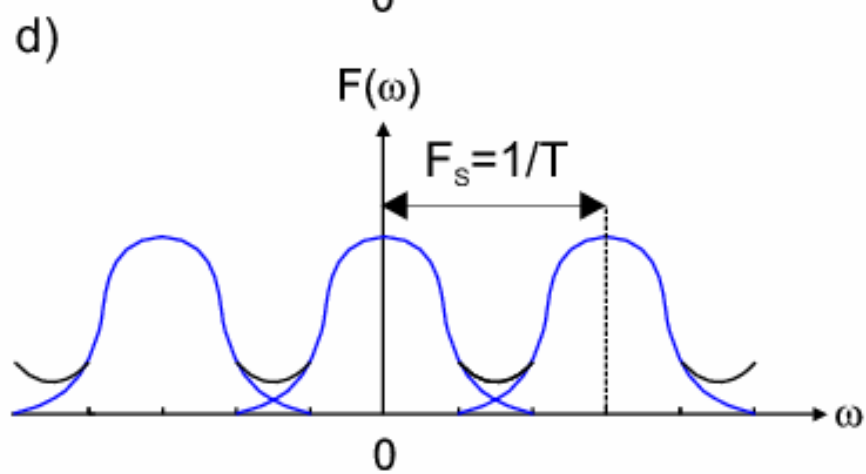
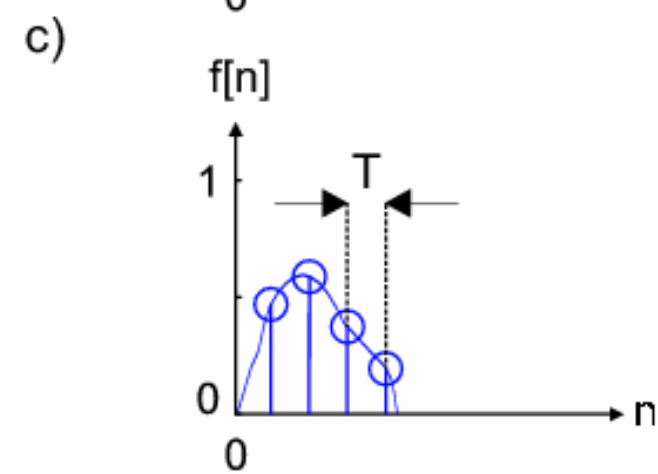
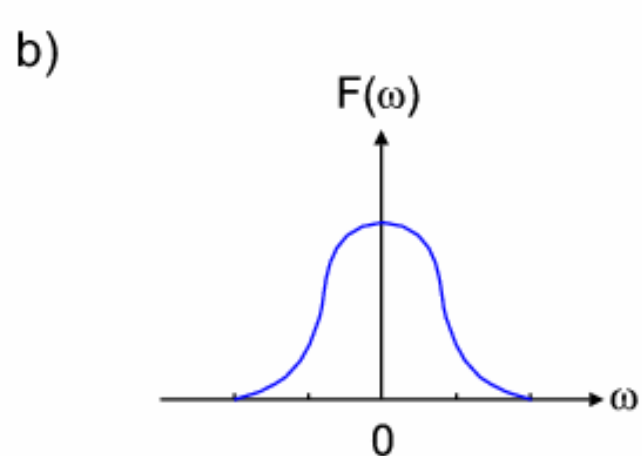
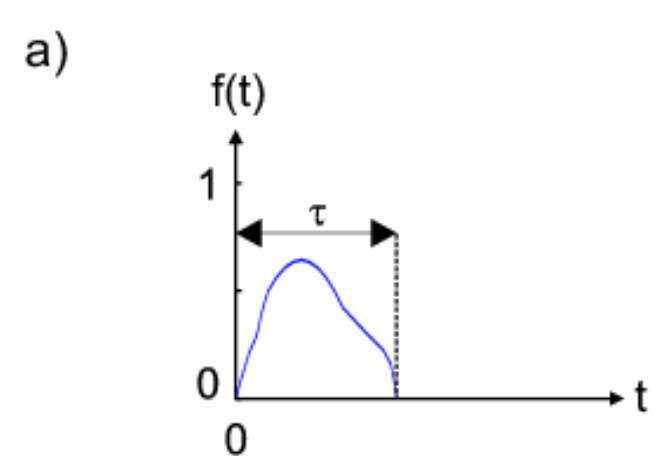
Abtastung im Zeitbereich:

Abtastung im Frequenzbereich:

bandbegrenzte Signale

zeitbegrenzte Signale





Diskrete Fourier-Transformation (DFT)

Für die Berechnung der DFT gehen wir von zeitbegrenzten Signalen $f(t)$ der Länge τ aus **(a)**. Zeitbegrenzte Signale haben ein Spektrum $F(\omega)$ das nicht bandbegrenzt ist **(b)**.

Aus dem zeitbegrenzten Signal gewinnen wir das diskrete Signal $f_s(t)$ durch Abtastung von $f(t)$ im Abstand $T=1/F_s$ **(c)**. Durch die Abtastung wird das Spektrum periodisch mit der Periodendauer $F_s=1/T$, wir erhalten das Spektrum $F_s(\omega)$ **(d)**.

Die Abtastung des Spektrum im Abstand $F_0=1/T_0$ **(f)** führt zur periodischen Fortsetzung des abgetasteten Zeitsignals, mit der Periode T_0 **(e)**.

Diskrete Fourier-Transformation

$$f[n] = \frac{1}{N_0} \sum_{k=0}^{N_0-1} F[k] e^{jk\Omega_0 n}$$

DFT

$$F[k] = \sum_{n=0}^{N_0-1} f[n] e^{-jk\Omega_0 n}$$

IDFT

$$\Omega_0 = \omega_o T = \frac{2\pi}{N_0}$$

Zeitbereich

Frequenzbereich

FR: $f(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} F[k] e^{jk\omega_0 t} \Leftrightarrow F[k] = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) e^{-jk\omega_0 t} dt$

FT: $f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{j\omega t} d\omega \Leftrightarrow F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt$

DFT: $f[n] = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} F[k] e^{jk\hat{\omega}_0 n} \Leftrightarrow F[k] = \sum_{n=0}^{N-1} f[n] e^{-jk\hat{\omega}_0 n}$

$$\hat{\omega}_0 = \omega T = \frac{2\pi}{N}$$

Spektrallinien der DFT

- Bei der DFT können die Spektrallinien nur im Raster der Abtastung im Frequenzbereich auftreten.

$$N = \frac{T_0}{T_s} = \frac{f_s}{f_0}; \text{ z.B.: } \frac{1000}{100} = 10 \text{ Samples: } 0, 10, 20, \dots, 90 \text{ Hz}$$

- Es können **keine Spektrallinien außerhalb des Rasters**, z.B. 15 Hz auftreten. Der DFT-Algorithmus muss die Komponente 15 Hz aus anderen Spektralkomponenten zusammensetzen!

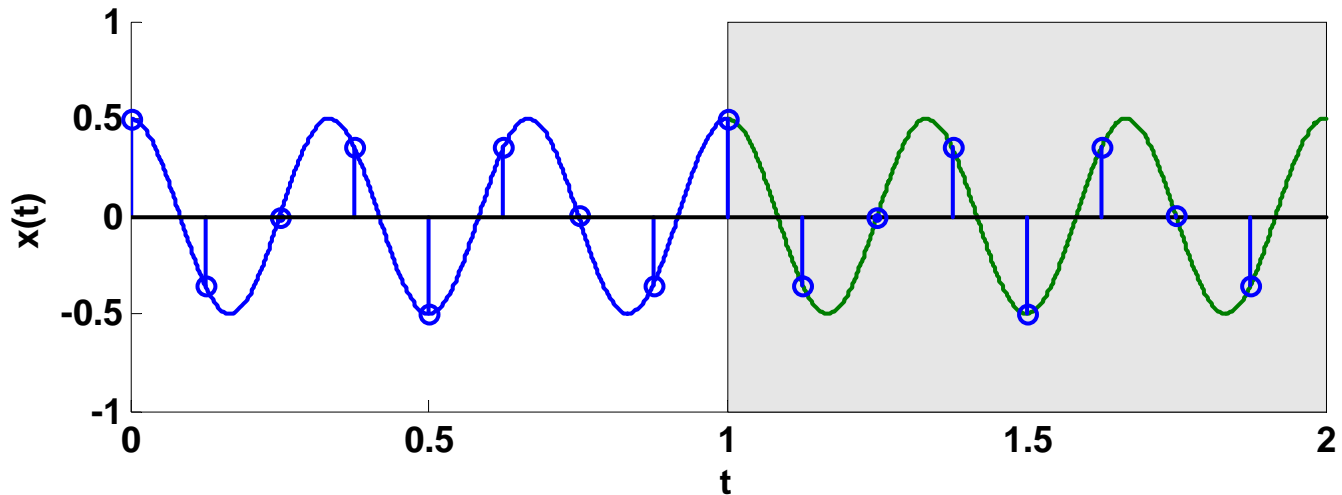
$$x[n] = e^{j(\hat{\omega}_0 n + \varphi)} \quad n = 0, 1, 2, \dots, N-1$$

Die N-Punkt DFT von $x[n]$ ist

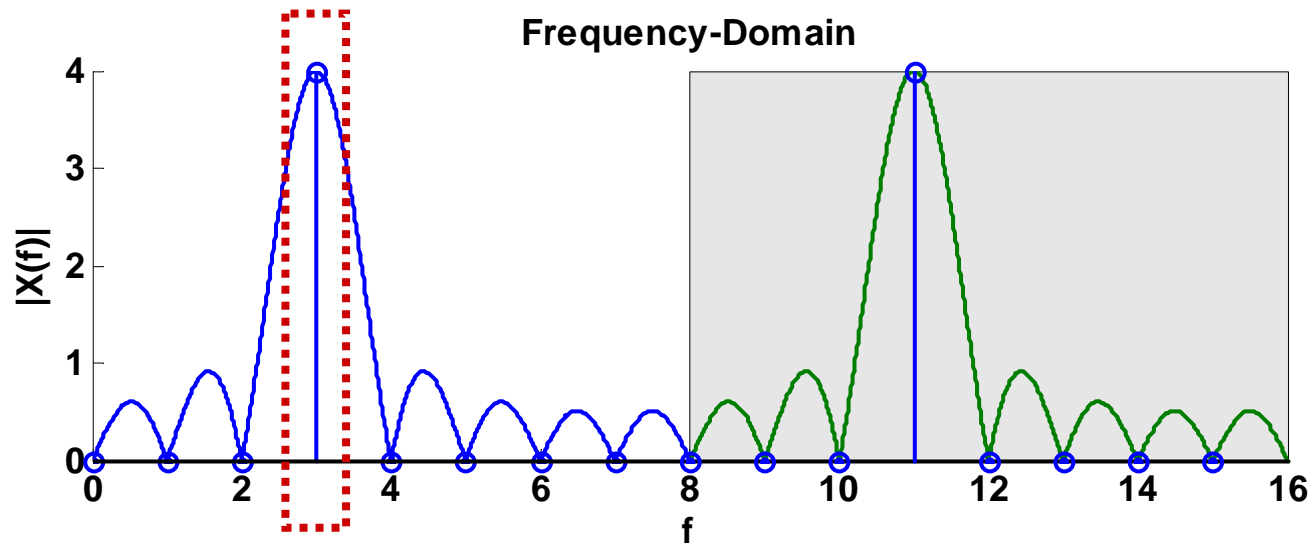
$$\begin{aligned} X[k] &= \sum_{n=0}^{N-1} e^{j(\hat{\omega}_0 n + \varphi)} e^{-j(2\pi/N)kn} = \dots = \\ &= e^{j\varphi} \frac{1 - e^{-j(2\pi k/N - \hat{\omega}_0)N}}{1 - e^{-j(2\pi k/N - \hat{\omega}_0)}} = \\ &= e^{j\varphi} e^{-j(2\pi k/N - \hat{\omega}_0)(N-1)/2} \frac{\sin \left[(2\pi k/N - \hat{\omega}_0) N / 2 \right]}{\sin \left[(2\pi k/N - \hat{\omega}_0) / 2 \right]} \end{aligned}$$

$X[k]$ besteht also aus Proben der Dirichlet'schen Funktion.

Time-Domain ($f = 3$, $T = 1$, $f_s = 8$, $N = 8$)

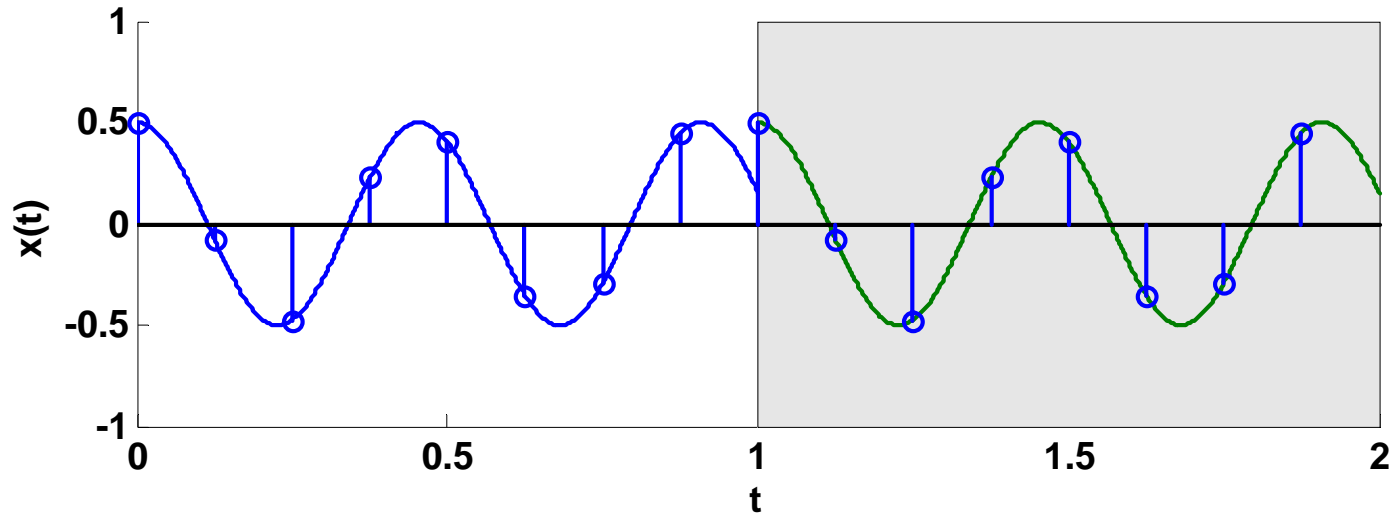


Frequency-Domain

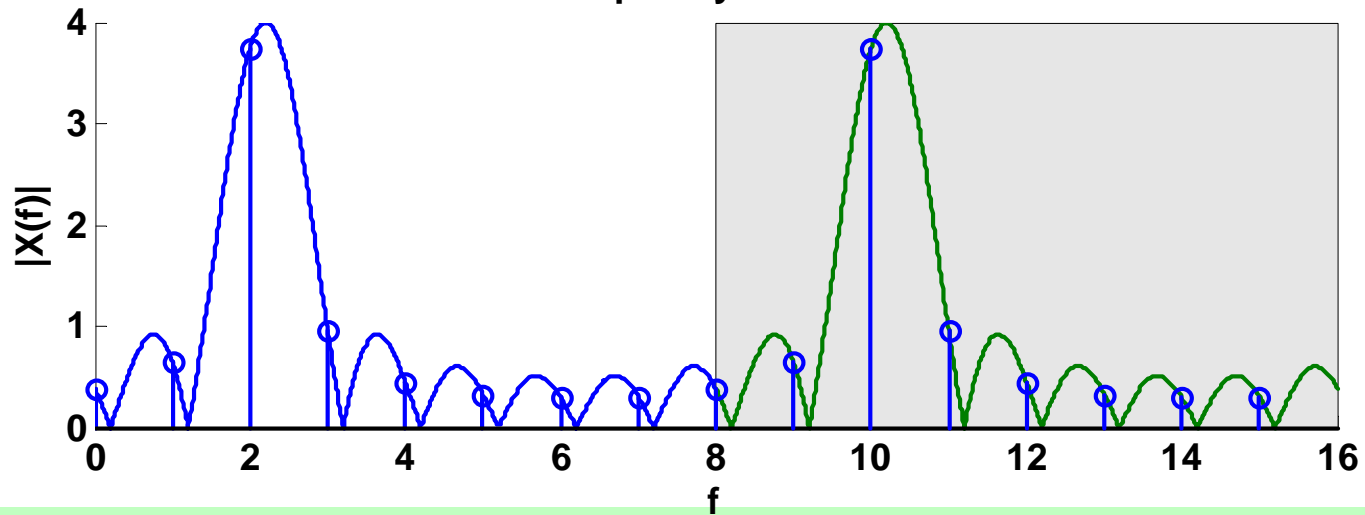


Bei der Abtastung von $f = 3$ liefert die Dirichlet'sche Funktion nur bei dieser Frequenz einen Wert. Die Kosinusfunktion ist periodisch fortgesetzt.

Time-Domain ($f = 2.2$, $T = 1$, $f_s = 8$, $N = 8$)



Frequency-Domain



Die Frequenz $f = 2.2$ liegt nicht im Raster und muss daher aus anderen Frequenzen zusammengesetzt werden! Die Dirichlet'sche Funktion liefert mehrere Werte. Beachten Sie die periodische Fortsetzung der Kosinusfunktion.

In der vorigen Darstellung haben wir das Spektrum von

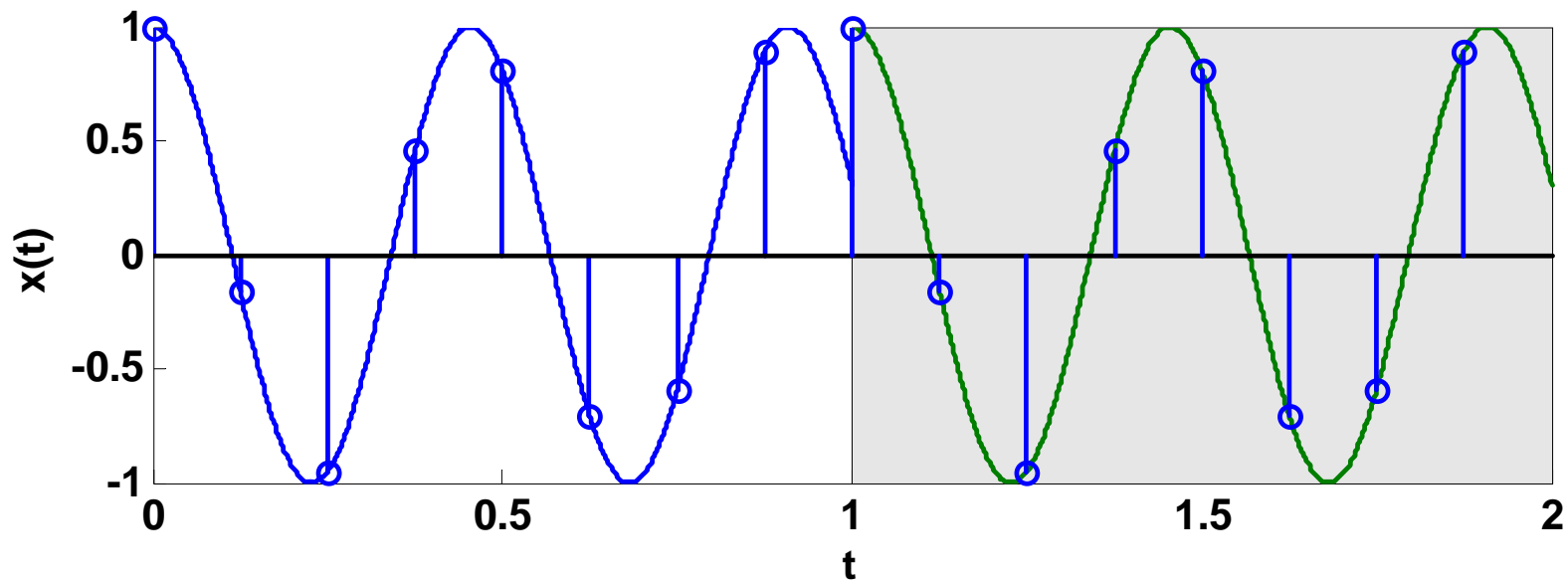
$$x[n] = e^{j(\hat{\omega}_0 n + \varphi)}$$

berechnet. Für ein reellwertiges Signal $x[n]$ müssen wir aber das Spektrum von

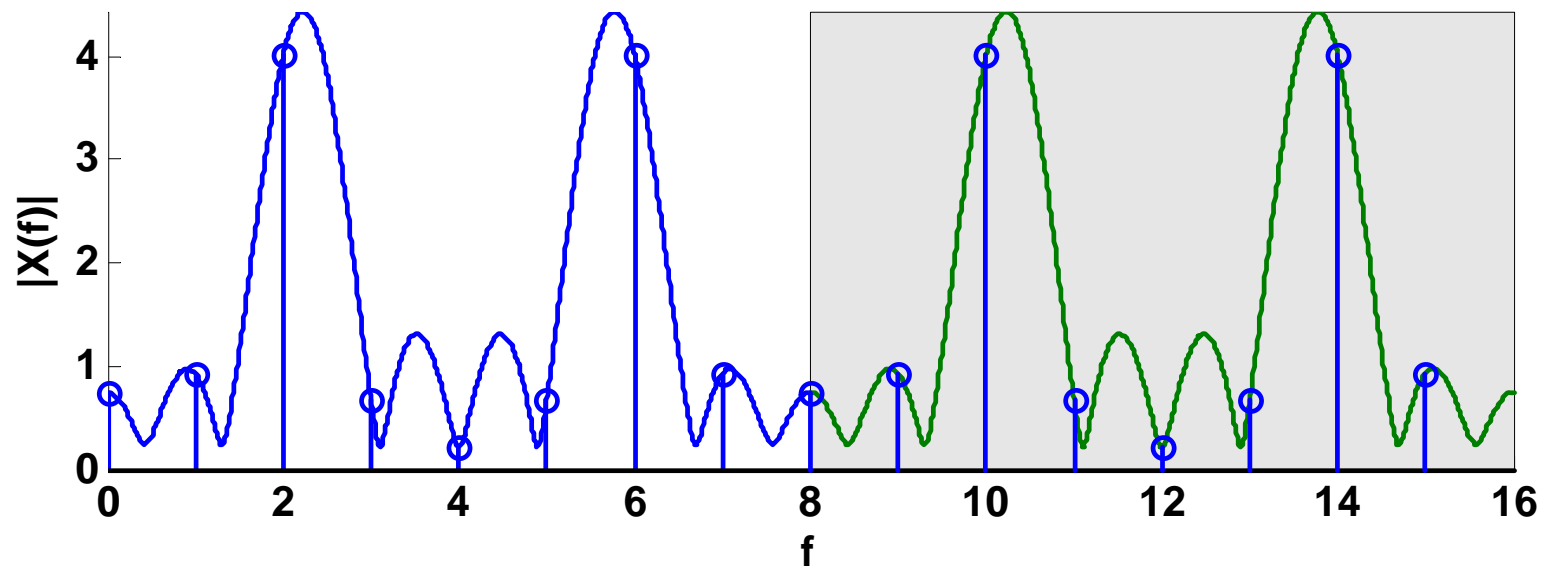
$$x[n] = \left(e^{j(\hat{\omega}_0 n + \varphi)} + e^{-j(\hat{\omega}_0 n + \varphi)} \right)$$

berechnen, d.h. $X[k]$ für $-\hat{\omega}_0$ addieren.

Time-Domain ($f = 2.2$, $T = 1$, $f_s = 8$, $N = 8$)



Frequency-Domain



Es wird immer das Spektrum der periodischen Fortsetzung ermittelt!

Die periodische Fortsetzung liefert aber nur dann eine Sinus-(Kosinus-)Funktion und damit eine einzelne Spektrallinie, wenn die Periodendauer genau in das Abtastintervall passt, d.h. nur für Spektrallinien, die auf dem Frequenzraster liegen!