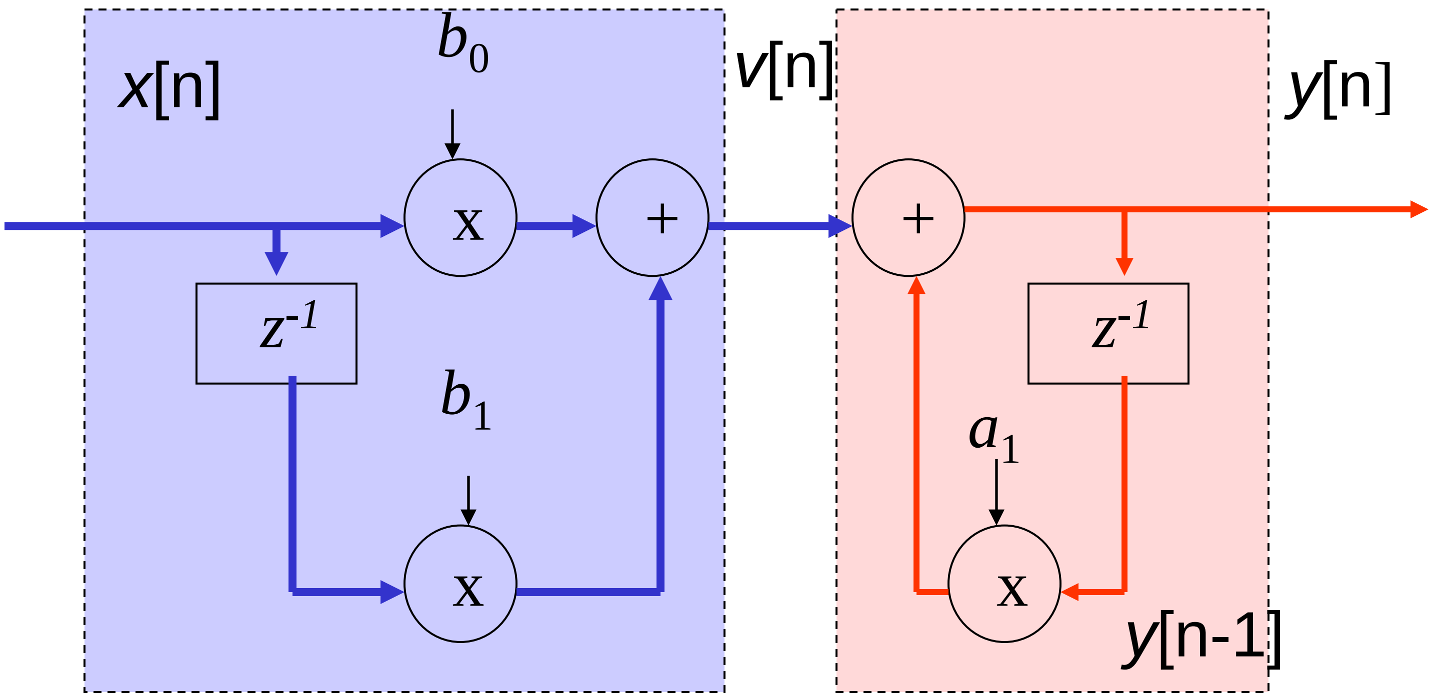
Infinite **I**mpulse **R**esponse-Filter
Rekursivfilter

IIR-Filter 1. Ordnung

$$y[n] = a_1 y[n-1] + \underbrace{b_o x[n] + b_1 x[n-1]}_{\text{FIR-Teil}}$$



Feed-forward Teil (FIR-Filter)

Feed-back Teil

Beispiel

$$y[n] = 0.8\,y[n-1] + 5x[n] \qquad (b_1 = 0)$$

$$x[n] = 2\delta[n] - 3\delta[n-1] + 2\delta[n-3]$$

<u>Anfangsbedingungen:</u>
Der Wert $y[n]$ zum Zeitpunkt $n = -1$ ist nicht bekannt !

Wir nehmen an, dass die Eingangsgröße $x[n]$ plötzlich angelegt wird und dass sie vorher Null war: $x[n] = 0$ für $n < n_0$

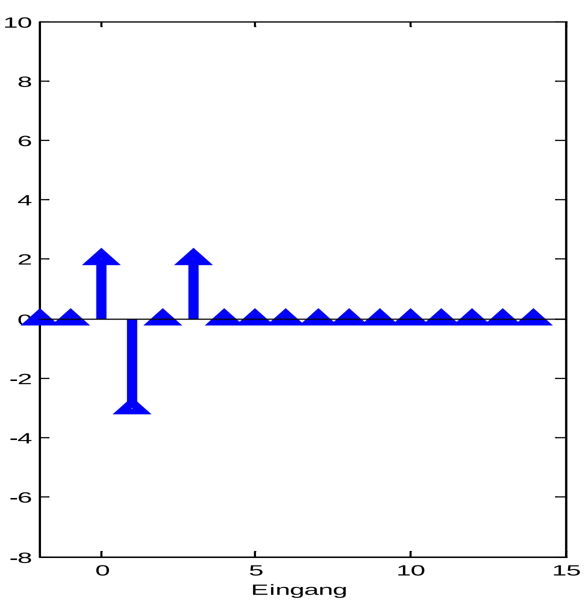
Wir nehmen weiters an, dass das System vor der Anfangszeit im Ruhezustand war, d.h. $y[n] = 0$ für $n < n_0$ (Initial rest)

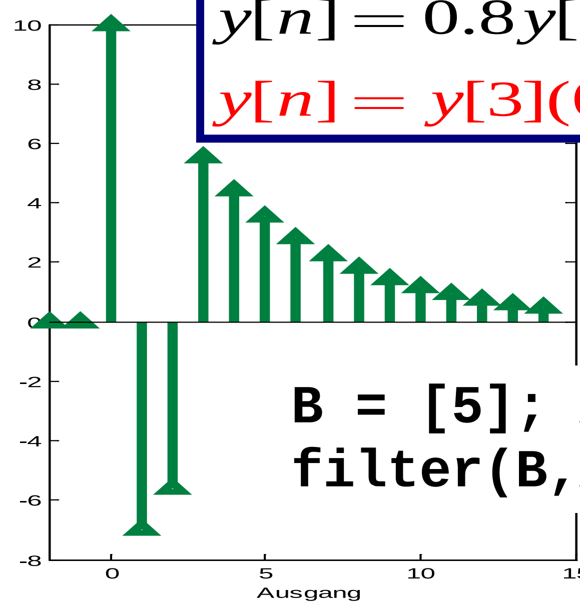
$$y[0] = 0.8y[-1] + 5(2) = 0.8\ (0) + 5\ (2) = 10$$
$$y[1] = 0.8y[0] + 5x[1] = 0.8\ (10) + 5\ (-3) = -7$$
$$y[2] = 0.8y[1] + 5x[2] = 0.8\ (-7) + 5\ (0) = -5.6$$
$$y[3] = 0.8y[2] + 5x[3] = 0.8\ (-5.6) + 5\ (2) = 5.52$$
$$y[4] = 0.8y[3] + 5x[4] = 0.8\ (5.52) + 5\ (0) = 4.4416$$
$$y[5] = 0.8y[4] + 5x[5] = 0.8\ (4.4416) + 5\ (0) = 3.5328$$
$$y[6] = 0.8y[5] + 5x[6] = 0.8\ (3.5328) + 5\ (0) = 2.8262$$

$$y[n] = 0.8y[n-1] + 5x[n]$$

$n > 3$ (Eingang Null)

$$y[n] = 0.8y[n-1]$$
$$y[n] = y[3](0.8)^{n-3}$$






```
B = [5]; A = [1 -0.8]
filter(B,A,x)
```

$$y[n] = \sum_{l=1}^{N} a_l\, y[n-l] + \sum_{k=0}^{M} b_k\, x[n-k]$$

Output ist f(Output)

Feed-back

FIR: Output ist f(Input)

Feed-forward

Bei FIR-Filtern ist M die Ordnung des Filters,
bei IIR-Filtern ist N die Ordnung des Filters.

Linearität, Zeitinvarianz

IIR-Filter $$y[n] = \sum_{l=1}^{N} a_l y[n-l] + \sum_{k=0}^{M} b_k x[n-k]$$

sind linear und zeitinvariant.

Impulsantwort IIR-System 1. Ordnung

Die Antwort auf einen Einheitsimpuls charakterisiert ein LTI-System vollständig.

Da jedes Eingangssignal als Überlagerung von gewichteten, zeitverzögerten Einheitspulsen dargestellt werden kann, können die entsprechenden Ausgangssignale von gewichteten und zeitverzögerten Versionen der Impuls-antwort gebildet werden:

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]h[n-k]$$

$$y[n] = a_1 y[n-1] + b_o x[n]$$

Differenzengleichung Impulsantwort

$$h[n] = a_1 h[n-1] + b_o \delta[n]$$

Die Lösung dieser Diffenzengleichung ist:

$$\boxed{h[n] = \begin{cases} b_o (a_1)^n & \text{für } n \geq 0 \\ 0 & \text{für } n < 0 \end{cases}}$$

Beweis durch Einsetzen:

1. $$\boxed{h[0] = a_1 h[-1] + b_0 \delta[0] = (a_1)(0) + b_0 1 = b_0}$$

für $n \geq 1$

2. $$h[n] = a_1 h[n-1] + \cancel{b_0 \delta[n]}^{\,0}$$

$$b_o (a_1)^n = a_1 \left(b_o a_1^{n-1} \right) = b_0 a_1^n$$

Schreibweise mit Einheitssprung

$$\delta_{-1}[n] = \begin{cases} 1 & \text{für } n \geq 0 \\ 0 & \text{für } n < 0 \end{cases}$$

dann wird

$$h[n] = b_o (a_1)^n \delta_{-1}[n]$$

Lösung der Differenzengleichung

$$\boxed{y[n] = a_1 y[n-1] + b_o x[n] + b_1 x[n-1]}$$

Da LTI-System, Impulsantwort Summe von zwei Termen

$$h[n] = b_o (a_1)^n \delta_{-1}[n] + b_1 (a_1)^{n-1} \delta_{-1}[n-1]$$

$$= \begin{cases} 0 & n < 0 \\ b_0 & n = 0 \\ \left(b_o + b_1 a_1^{-1}\right)\left(a_1\right)^n & n \geq 1 \end{cases}$$

Sprungantwort

$$y[n] = a_1 y[n-1] + b_o x[n]$$

Berechnen der Sprungantwort durch Einsetzen in die Differenzengleichung und punktweises Berechnen des Ausgangsignals:

n	$x[n]$	$y[n]$
0	1	b_0
1	1	$b_0 + b_0(a_1)$
2	1	$b_0 + b_0(a_1) + b_0(a_1)^2$
3	1	$b_0\left(1 + a_1 + a_1{}^2 + a_1{}^3\right)$

$$y[n] = b_o(1 + a_1 + a_1^2 + \ldots + a_1^n) = b_0 \sum_{k=0}^{n} a_1^k$$

Es ist

$$\sum_{k=0}^{L} r^k = \begin{cases} \dfrac{1 - r^{L+1}}{1 - r} & r \neq 1 \\ L + 1 & r = 1 \end{cases}$$

$$y[n] = b_0 \frac{1 - a_1^{n+1}}{1 - a_1} \qquad \text{für } n \geq 0, \quad \text{wenn } a_1 \neq 1$$

Wir müssen drei Fälle unterscheiden:

$$y[n] = b_0 \frac{1 - a_1^{n+1}}{1 - a_1}$$

① Wenn $|a_1| > 1$, dann dominiert a_1^{n+1} und $y[n]$ wächst über alle Grenzen ==> Instabilität

② Wenn $|a_1| < 1$, dann geht a_1^{n+1} für $n \to \infty$ gegen Null.

Abklingen ==> Stabilität $\underbrace{\lim}_{n \to \infty} y[n] = \dfrac{b_0}{1 - a_1}$

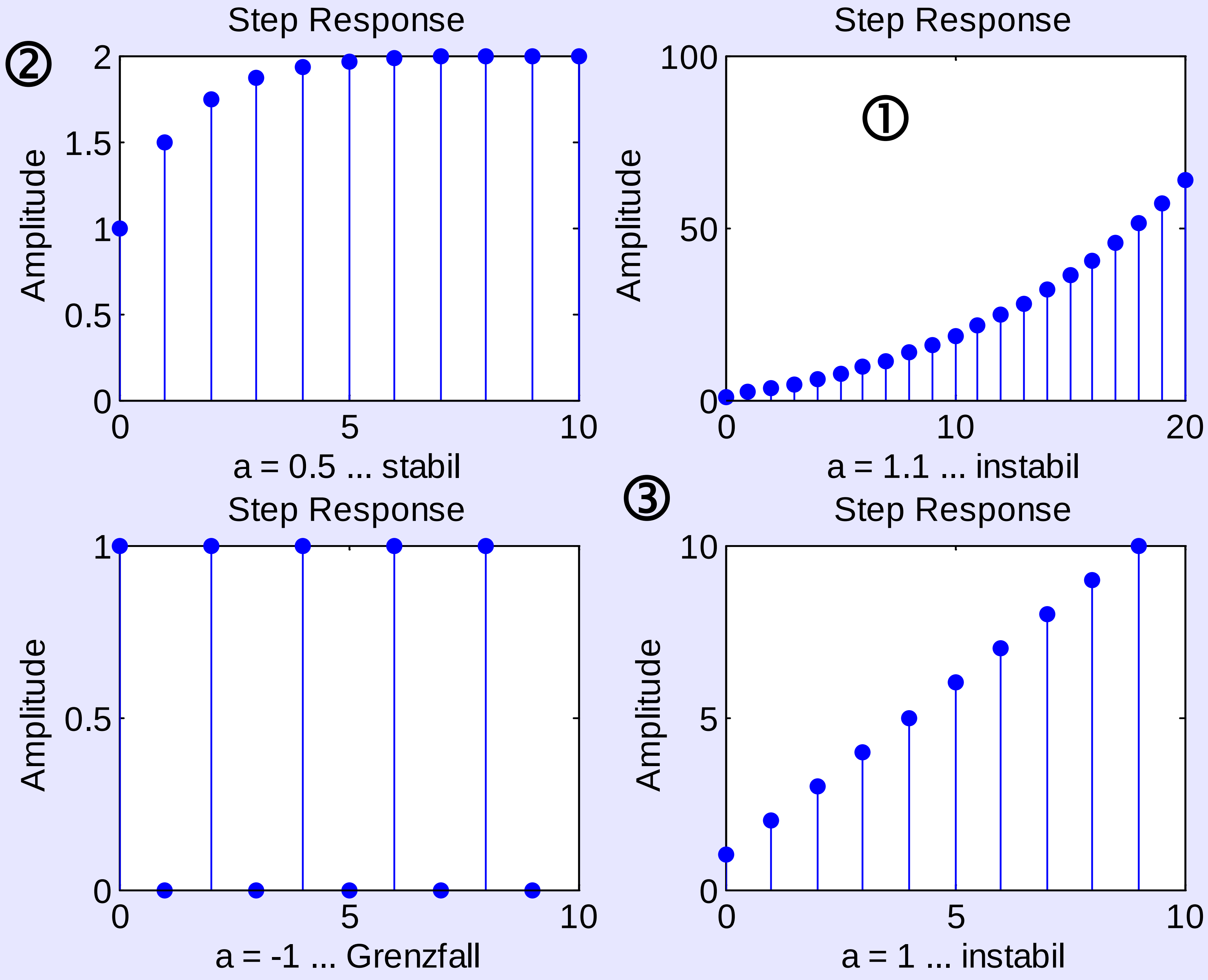
③ $a = 1$

$y[n] = (n+1) b_o$ für $n \to \infty$ geht $y[n] \to \infty$

$a = -1$

$y[n] = b_o$ wenn n gerade

$y[n] = 0$ wenn n ungerade



②
Step Response
Amplitude
2
1.5
1
0.5
0
0
5
10
a = 0.5 ... stabil
①
Step Response
Amplitude
100
50
0
0
10
20
a = 1.1 ... instabil
Step Response
Amplitude
1
0.5
0
0
5
10
a = -1 ... Grenzfall
③
Step Response
Amplitude
10
5
0
0
5
10
a = 1 ... instabil

Systemfunktion

$$n - \text{Domain} \qquad \Leftrightarrow \qquad z - \text{Domain}$$

$$y[n] = h[n] * x[n] \qquad \Leftrightarrow \qquad Y(z) = H(z)X(z)$$

Die Systemfunktion von FIR-Systemen ist immer ein Polynom in z^{-1}.
Durch die Rückkoppelung wird die Systemfunktion von IIR-Systemen immer ein Verhältnis von zwei Polynomen (gebrochen rationale Funktion).

$$y[n] = a_1 y[n-1] + b_o x[n] + b_1 x[n-1]$$

$$Y(z) = a_1 z^{-1} Y(z) + b_o X(z) + b_1 z^{-1} X(z)$$

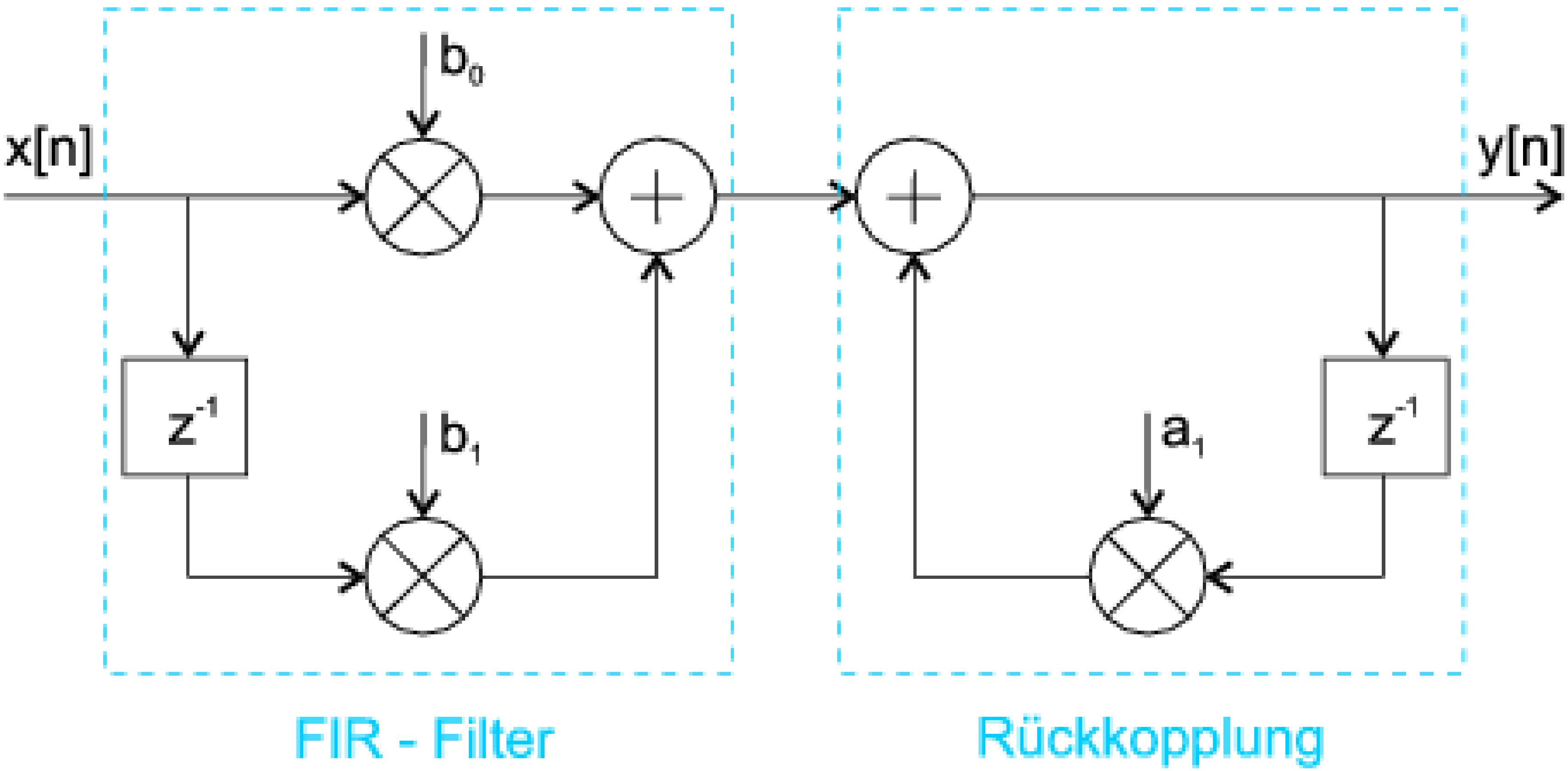
$$Y(z) - a_1 z^{-1} Y(z) = b_o X(z) + b_1 z^{-1} X(z)$$

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{b_o + b_1 z^{-1}}{1 - a_1 z^{-1}} = \frac{B(z)}{A(z)}$$

Zählerpolynom: Feed-forward Koeffizienten

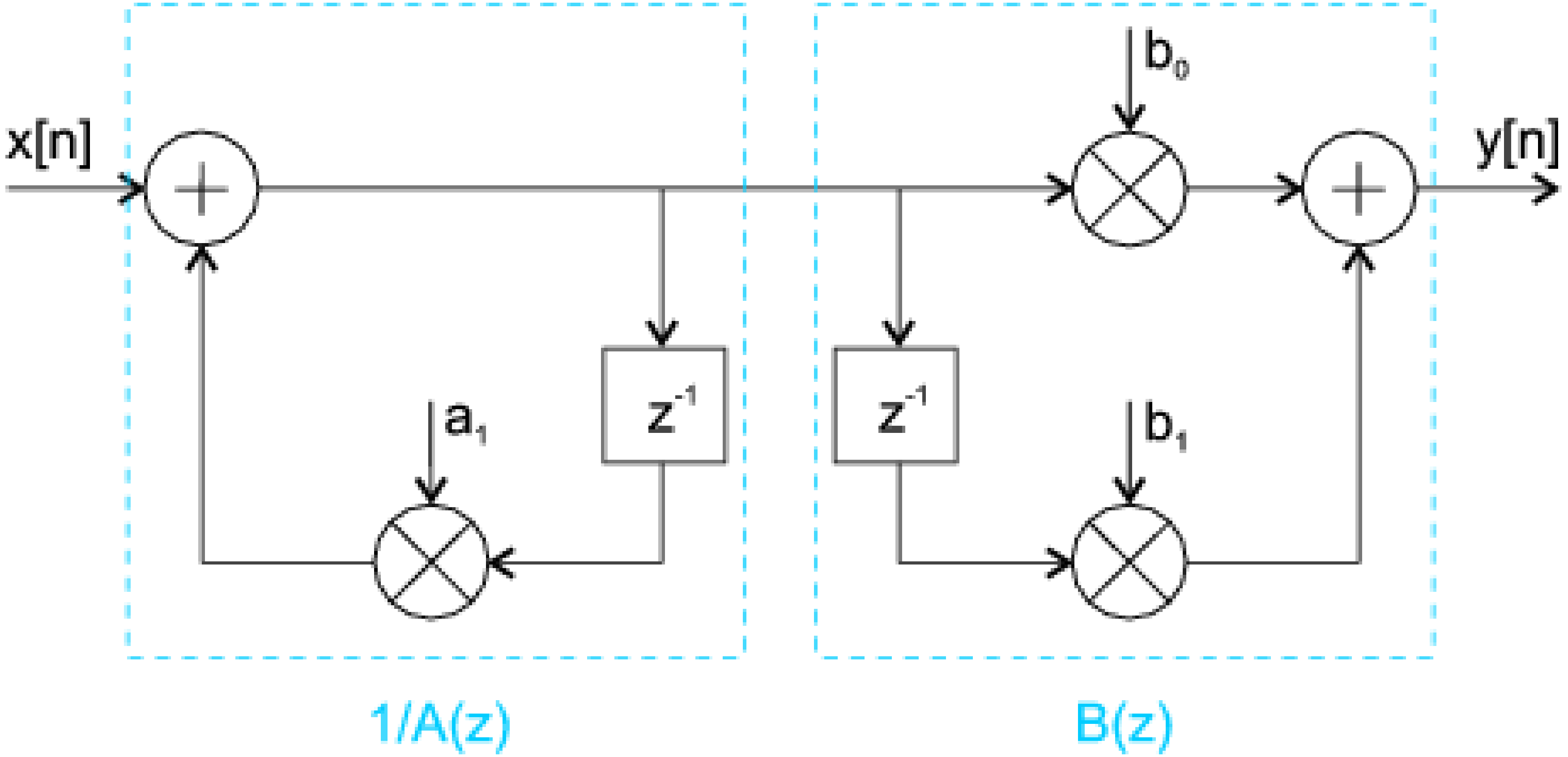
Nennerpolynom: 1 + negative Feed-back Koeffizienten

Blockdiagramm 1.Direktform



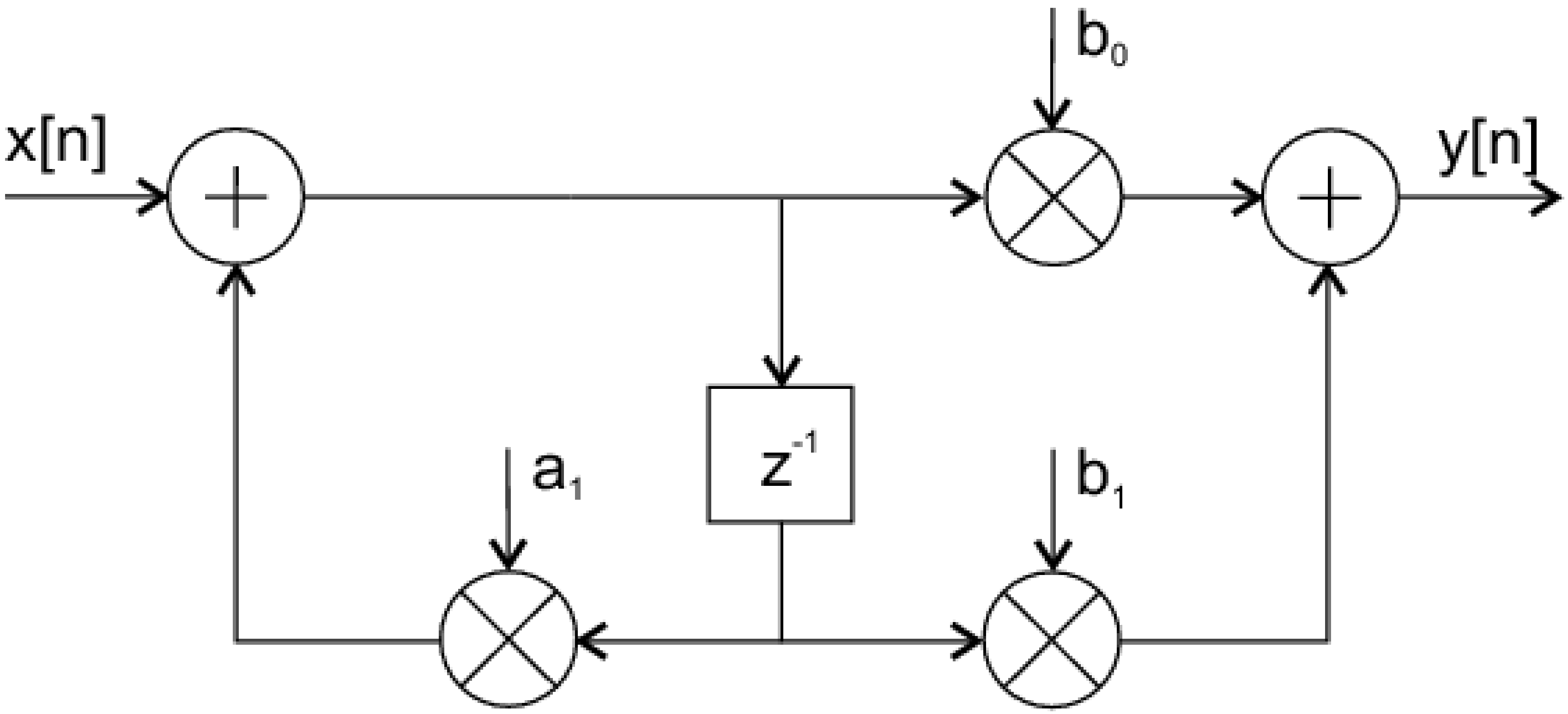
$$H(z)=\frac{b_o+b_1 z^{-1}}{1-a_1 z^{-1}}=\left(\frac{1}{1-a_1 z^{-1}}\right)\left(b_o+b_1 z^{-1}\right)=B(z)\cdot\left(\frac{1}{A(z)}\right)$$

Blockdiagramm 2.Direktform



$$\left(\frac{1}{A(z)}\right) \cdot B(z) = B(z) \cdot \left(\frac{1}{A(z)}\right)$$

Delay-Elemente kombiniert



Pole und Nullstellen

$$H(z) = \frac{b_o + b_1 z^{-1}}{1 - a_1 z^{-1}} = \frac{b_o z + b_1}{z - a_1}$$

$$z = -\frac{b_1}{b_o}$$ Nullstelle

$$z = a_1$$ Polstelle

Pole und Stabilität

Die Systemfunktion

$$H(z) = \frac{b_o + b_1 z^{-1}}{1 - a_1 z^{-1}} = \frac{b_o(z + \frac{b_1}{b_0})}{z - a_1}$$

hat die Impulsantwort

$$h[n] = b_o(a_1)^n \delta_{-1}[n] + b_1(a_1)^{n-1}\delta_{-1}[n-1]$$

$$= \begin{cases} 0 & n < 0 \\ b_0 & n = 0 \\ \left(b_o + b_1 a_1^{-1}\right)\left(a_1\right)^n & n \geq 1 \end{cases}$$

Die Impulsantwort ist proportional $\left(a_1\right)^n$ für $n \geq 1$.

Für $\left|a_1\right| < 1$ klingt dieser Ausdruck ab, wenn $n \to \infty$.

Wenn $\left|a_1\right| > 1$ steigt dieser Ausdruck exponentiell an.

Die Lage der Pole zeigt also an, ob die Impulsantwort abklingt oder ansteigt. Systeme mit abklingenden Impulsantworten sind stabile Systeme.

Bounded Input <=> Bounded Output

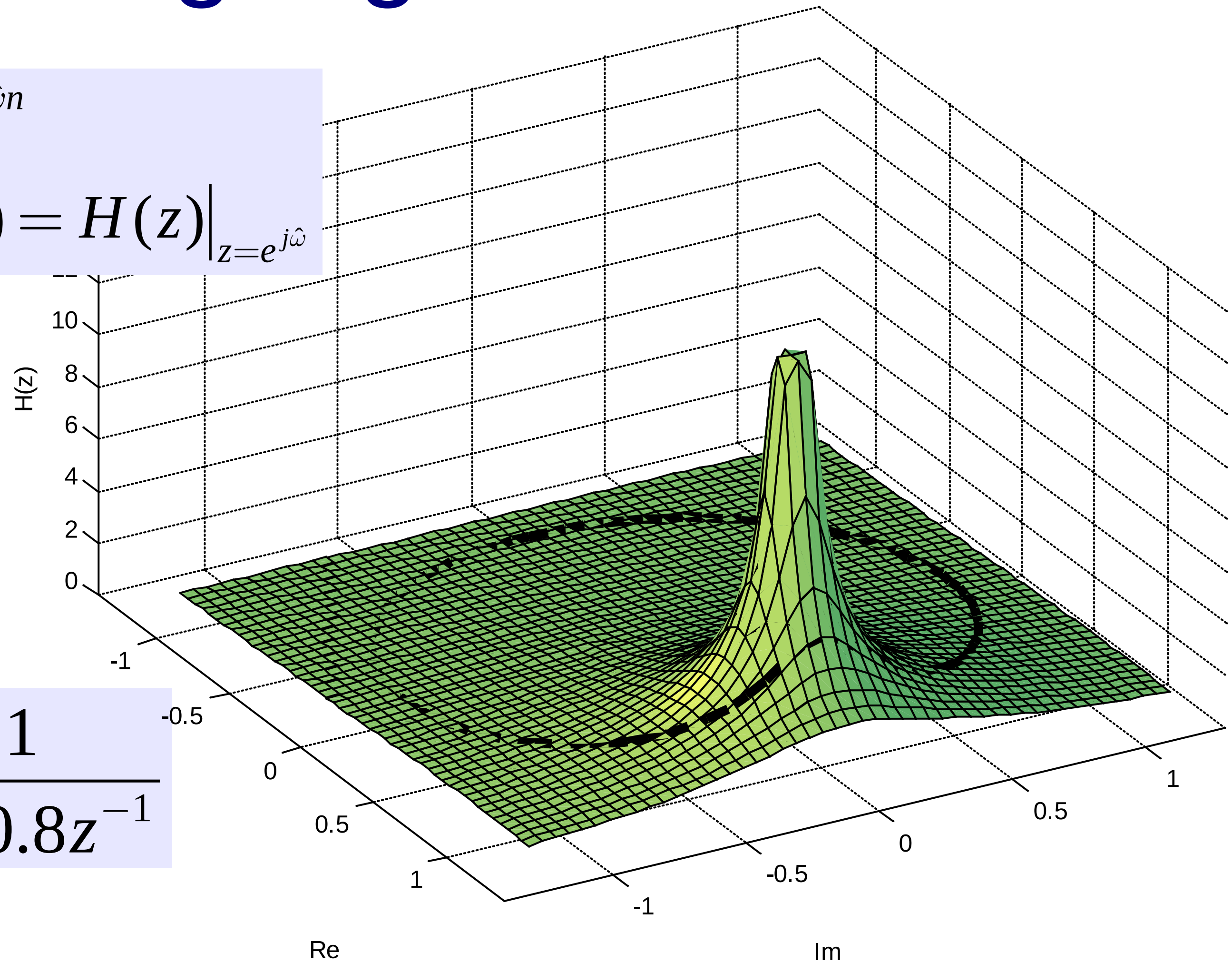
Bibo-Stabilität

Für stabile Systeme liegen die Pole innerhalb des Einheitskreises der *z-E*bene !

Frequenzgang eines IIR-Filters

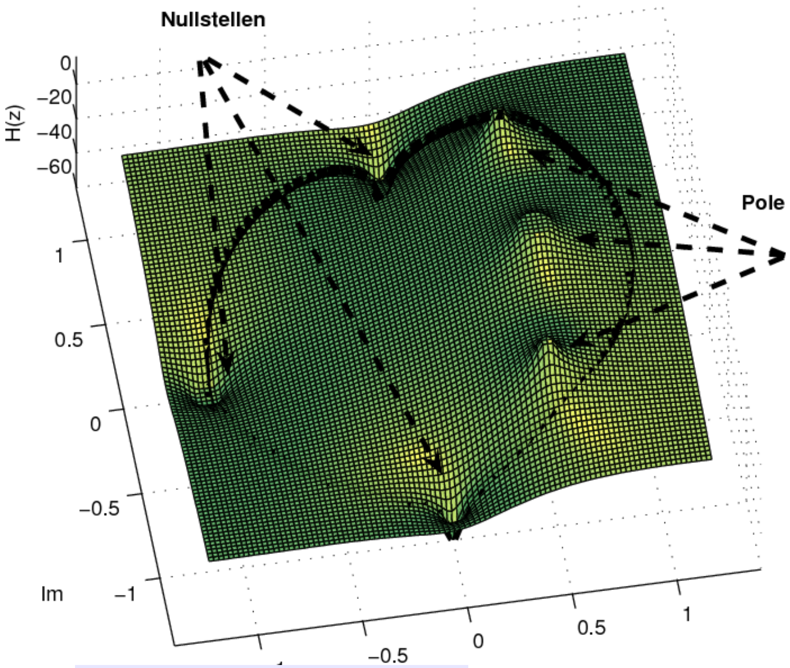
$$y[n] = \mathbf{H}(\hat{\omega})e^{j\hat{\omega}n}$$

$$\mathbf{H}(\hat{\omega}) = H(e^{j\hat{\omega}}) = H(z)\Big|_{z=e^{j\hat{\omega}}}$$

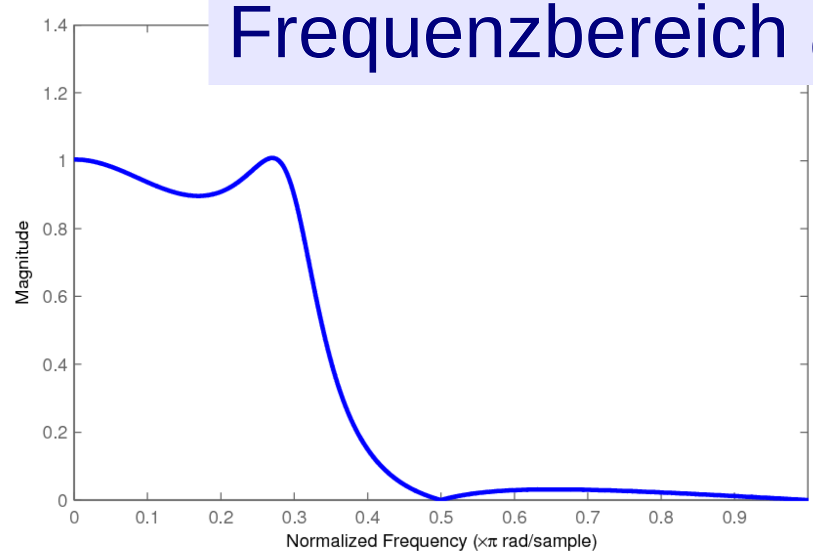


$$H(z) = \frac{1}{1 - 0.8z^{-1}}$$

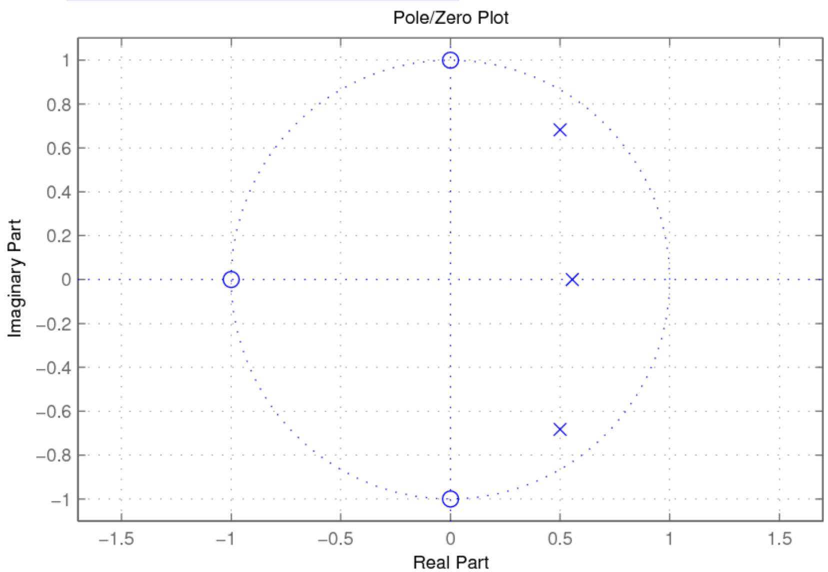
Sinusfolge trifft auf Pol auf dem Einheitskreis:
bounded input ➔ unbounded output (Resonanz)



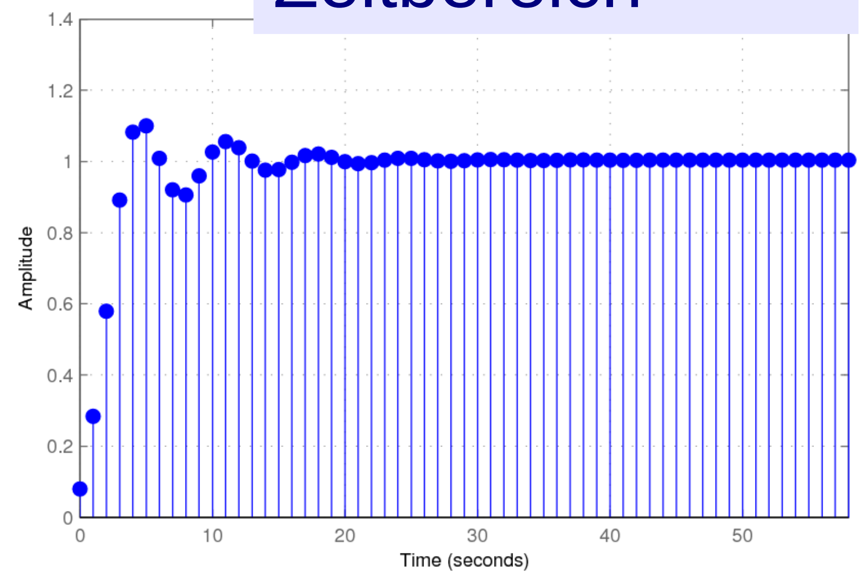
Frequenzbereich (lin)



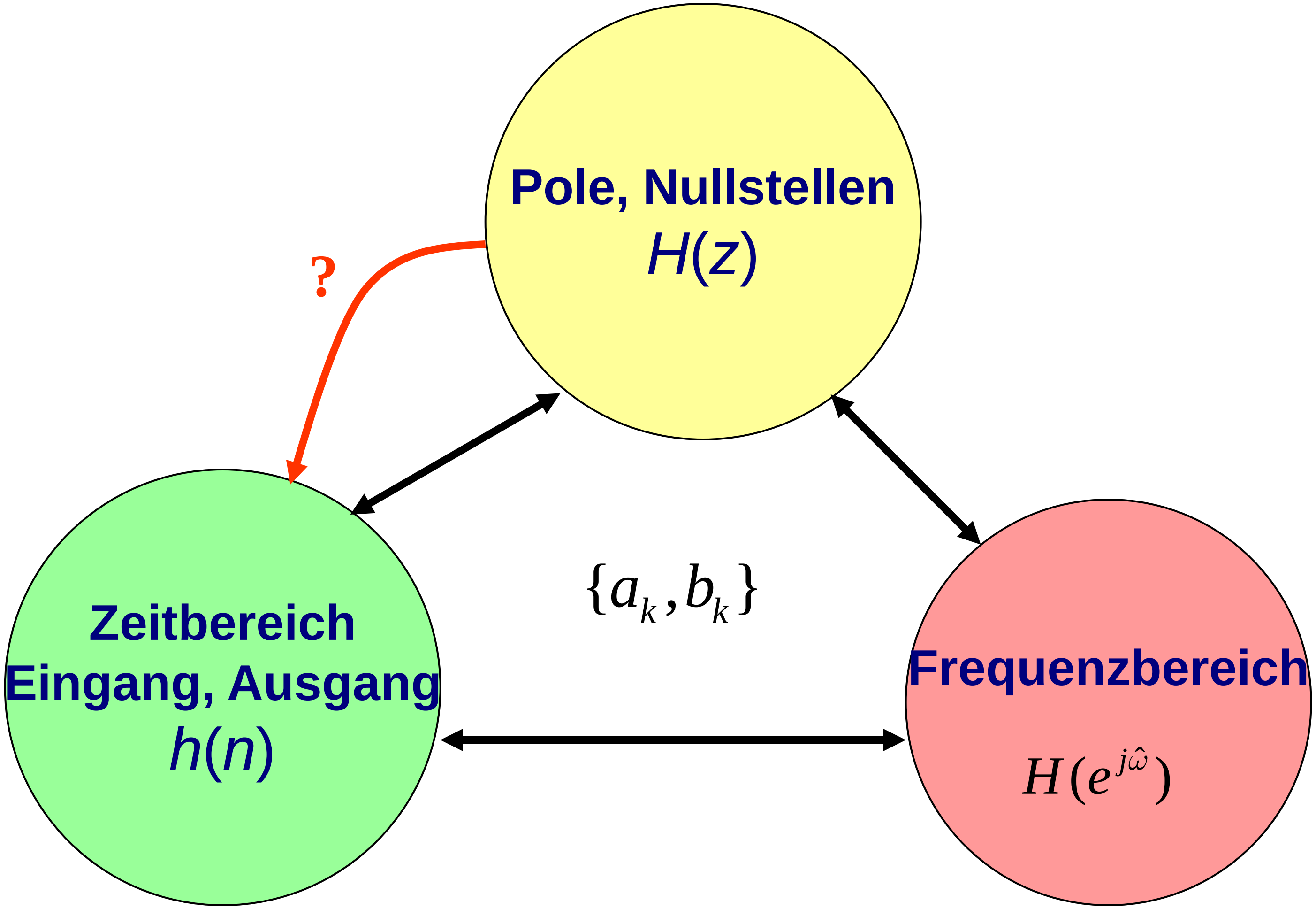
z-Bereich



Zeitbereich



$$h[n] \quad H(z) \quad H(e^{j\hat{\omega}})$$



$$y[n] = a_1 y[n-1] + a_2 y[n-2] + b_0 x[n] + b_1 x[n-1] + b_2 x[n-2]$$

$$H(z) = \frac{b_0 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2}}{1 - a_1 z^{-1} - a_2 z^{-2}}$$

Lösung DGL?

$$H(e^{j\hat{\omega}}) = \frac{b_0 + b_1 e^{-j\hat{\omega}} + b_2 e^{-j2\hat{\omega}}}{1 - a_1 e^{-j\hat{\omega}} - a_2 e^{-j\hat{\omega}}}$$

Inverse *z*-Transformation

Einführung am Beispiel eines Systems 1. Ordnung

$$H(z) = \frac{b_0 + b_1 z^{-1}}{1 - a_1 z^{-1}} \qquad Y(z) = H(z)X(z)$$

1. Bestimmung der z – Transformation $\mathrm{X}(z)$
2. Muliplikation von $H(z)X(z)$
3. Bestimmung der Rücktransformation von $Y(z)$

Wir bestimmen die Sprungantwort eines Systems 1. Ordnung.

$$h[n] = a^n \delta_{-1}[n]$$

$$H(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a^n z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(az^{-1}\right)^n$$

für $\left|az^{-1}\right| < 1$ ist diese Summe endlich $\quad \sum_{k=0}^{\infty} x^k = \frac{1}{1-x} \quad$ für $|x| < 1$

$$H(z) = \frac{1}{1 - az^{-1}} \qquad \text{... für } |a| < z$$

$$\boxed{a^n \delta_{-1}[n] \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{1 - az^{-1}}}$$

Einheitssprung für $a = 1$

Partialbruchzerlegung

$$Y(z) = H(z)X(z) = \frac{b_o + b_1 z^{-1}}{1-(1+a_1)z^{-1} + a_1 z^{-2}} = \frac{b_o + b_1 z^{-1}}{\left(1-a_1 z^{-1}\right)} \frac{1}{\left(1-z^{-1}\right)} =$$

$$= \frac{A}{1-a_1 z^{-1}} + \frac{B}{1-z^{-1}} \qquad \text{(Berechnung durch Koeffizientenvergleich)}$$

oder schneller über

$$Y(z)(1-a_1 z^{-1}) = \frac{b_o + b_1 z^{-1}}{1-z^{-1}} = A + \frac{B(1-a_1 z^{-1})}{1-z^{-1}}$$

$$Y(z)(1-a_1 z^{-1})\Big|_{z=a_1} = \frac{b_o + b_1 z^{-1}}{1-z^{-1}}\Bigg|_{z=a_1} = A + \frac{B(1-a_1 z^{-1})}{1-z^{-1}}\Bigg|_{z=a_1} = A$$

$$A = \frac{b_o + b_1 z^{-1}}{1-z^{-1}}\Bigg|_{z=a_1} = \frac{b_o + b_1 a_1^{-1}}{1-a_1^{-1}}$$

$$B = Y(z)(1 - z^{-1})\Big|_{z=1} = \frac{b_0 + b_1}{1 - a_1}$$

$$y[n] = \left(\frac{b_o + b_1 a_1^{-1}}{1 - a_1^{-1}}\right) a_1^{\,n} \delta_{-1}[n] + \left(\frac{b_0 + b_1}{1 - a_1}\right) \delta_{-1}[n]$$

$$\frac{A}{1 - az^{-1}} \quad \Leftrightarrow \quad A a^n \delta_{-1}[n]$$

Rücktransformation (M<N)

1. Faktorisierung der Nennerpolynoms von $H(z)$

$$(1-p_k z^{-1}) \quad \text{für} \quad k=1,2,\ldots,N$$

2. Partialbruchzerlegung

$$H(z)=\sum_{k=1}^{N}\frac{A_k}{1-p_k z^{-1}}$$

$$A_k = H(z)(1-p_k z^{-1})\Big|_{z=p_k}$$

3. Rücktransformation

$$h[n]=\sum_{k=1}^{N} A_k {p_k}^n \delta_{-1}[n]$$

Wichtige Transformationspaare

$$ax_1[n] + bx_2[n] \quad \Leftrightarrow \quad aX_1(z) + bX_2(z)$$

$$x[n - n_0] \quad \Leftrightarrow \quad z^{-n_0} X(z)$$

$$y[n] = x[n] * h[n] \quad \Leftrightarrow \quad Y(z) = X(z)H(z)$$

$$\delta[n] \quad \Leftrightarrow \quad 1$$

$$\delta[n - n_0] \quad \Leftrightarrow \quad z^{-n_0}$$

$$a^n \delta_{-1}[n] \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{1 - az^{-1}}$$

$$X(z) = \frac{1-2.1z^{-1}}{1-0.3z^{-1}-0.4z^{-2}} = \frac{1-2.1z^{-1}}{(1+0.5z^{-1})(1-0.8z^{-1})}$$

$$X(z) = \frac{A}{1+0.5z^{-1}} + \frac{B}{1-0.8z^{-1}}$$

$$X(z)(1+0.5z^{-1}) = \frac{1-2.1z^{-1}}{1-0.8z^{-1}} \underbrace{\frac{1+0.5z^{-1}}{1+0.5z^{-1}}}_{1}\Bigg|_{z=-0.5} = A + \underbrace{\frac{B(1+0.5z^{-1})}{1-0.8z^{-1}}}_{0}\Bigg|_{z=-0.5} = 2$$

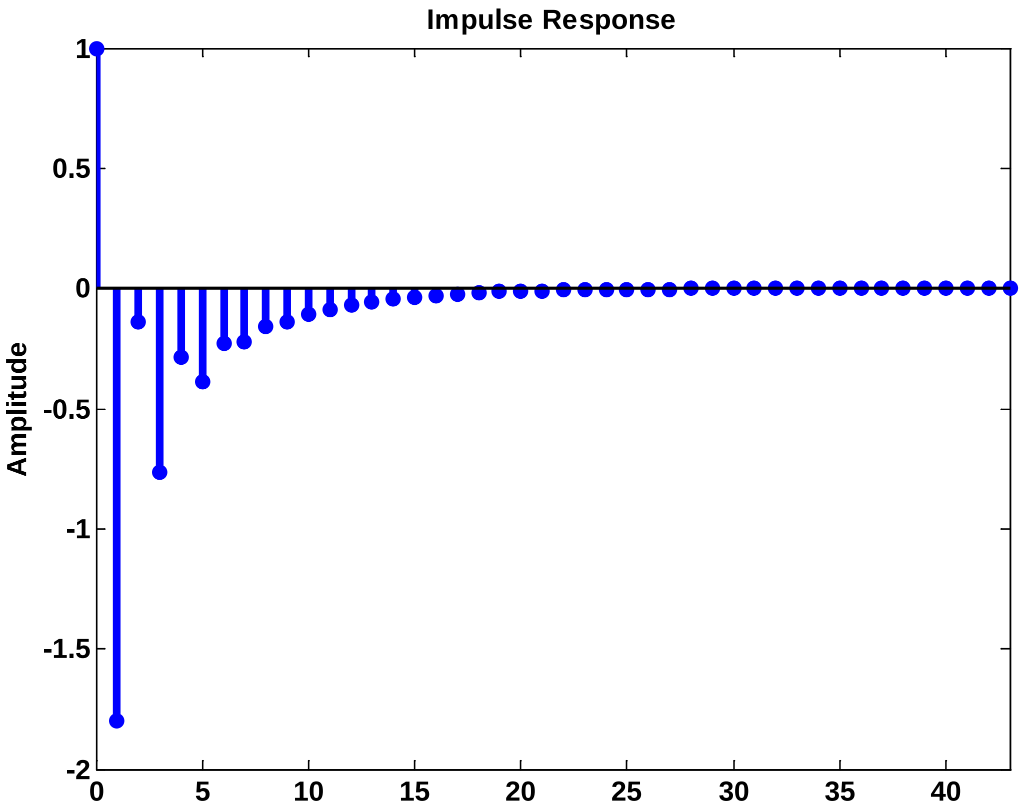
$$B = X(z)(1+0.5z^{-1}) = \frac{1-2.1z^{-1}}{1-0.8z^{-1}}\Bigg|_{z=0.8} = -1$$

$$x[n] = 2(-0.5)^n \delta_{-1}[n] - (0.8)^n \delta_{-1}[n]$$

```
A = [1 -0.3 -0.4]; B = [1 -2.1];
[R,P,K] = residuez(B,A)

R'  = -1      2
P'  =  0.8  -0.5
K   =  []


impz(B,A)
```



Frequenzgang IIR-Filter

Frequenzgang bei FIR-Filtern

$$y[n] = \sum_{k=0}^{M} b_k x[n-k] = \sum_{k=0}^{M} b_k e^{-j\hat{\omega}k} \cdot Ae^{j\hat{\omega}n}$$

$$= \mathbf{H}(\hat{\omega}) \quad \cdot \quad Ae^{j\hat{\omega}n}$$

Frequenzgang mit z-Transformation

$$\mathbf{H}(\hat{\omega}) = H(e^{j\hat{\omega}}) = H(z)\Big|_{z=e^{j\hat{\omega}}}$$

z.B.: $H(z) = \dfrac{b_0}{1 - a_1 z^{-1}} \qquad H(e^{j\hat{\omega}}) = \dfrac{b_0}{1 - a_1 e^{-j\hat{\omega}}}$

$$y[n] = H(e^{j\hat{\omega}_0}) \cdot e^{j\hat{\omega}_0 n} = \left(\frac{b_0}{1 - a_1 e^{-j\hat{\omega}_0}} \right) \cdot e^{j\hat{\omega}_0 n} \qquad -\infty < n < \infty$$

Steady state - transient response
eingeschwungener Zustand - Übergangsantwort

Plötzlich angelegte komplexe Exponentialfolge:

$$x[n] = e^{j\hat{\omega}_0 n}\delta_{-1}[n] \quad \Leftrightarrow \quad X(z) = \frac{1}{1 - e^{j\hat{\omega}_0} z^{-1}}$$

$$Y(z) = H(z)X(z) = \frac{b_0}{1 - a_1 z^{-1}} \frac{1}{1 - e^{j\hat{\omega}_0} z^{-1}}$$

Nach der Partialbruchzerlegung erhalten wir:

$$Y(z) = \frac{\frac{b_0 a_1}{a_1 - e^{j\hat{\omega}_0}}}{1 - a_1 z^{-1}} + \frac{\frac{b_0}{1 - a_1 e^{j\hat{\omega}_0}}}{1 - e^{j\hat{\omega}_0} z^{-1}}$$

$$Y(z) = \frac{\frac{b_0 a_1}{a_1 - e^{j\hat{\omega}_0}}}{1 - a_1 z^{-1}} + \frac{\frac{b_0}{1 - a_1 e^{j\hat{\omega}_0}}}{1 - e^{j\hat{\omega}_0} z^{-1}}$$

$$y[n] = \underbrace{\frac{b_0 a_1}{a_1 - e^{j\hat{\omega}_0}} a_1^{\,n} \delta_{-1}[n]}_{\text{klingt ab, wenn stabil}} + \underbrace{\frac{b_0}{1 - a_1 e^{j\hat{\omega}_0}} e^{j\hat{\omega}_0 n}}_{\text{steady state}} \delta_{-1}[n]$$

$$\left[a^n u[n] \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{1 - a z^{-1}} \Leftrightarrow \right]$$

$$b_0 = 1;\ a_1 = -0.9$$

$$y[n]_1 = \left(\frac{-0.9}{-0.9 - e^{j0.2\pi}} \right) (-0.9)^n \delta_{-1}[n] =$$

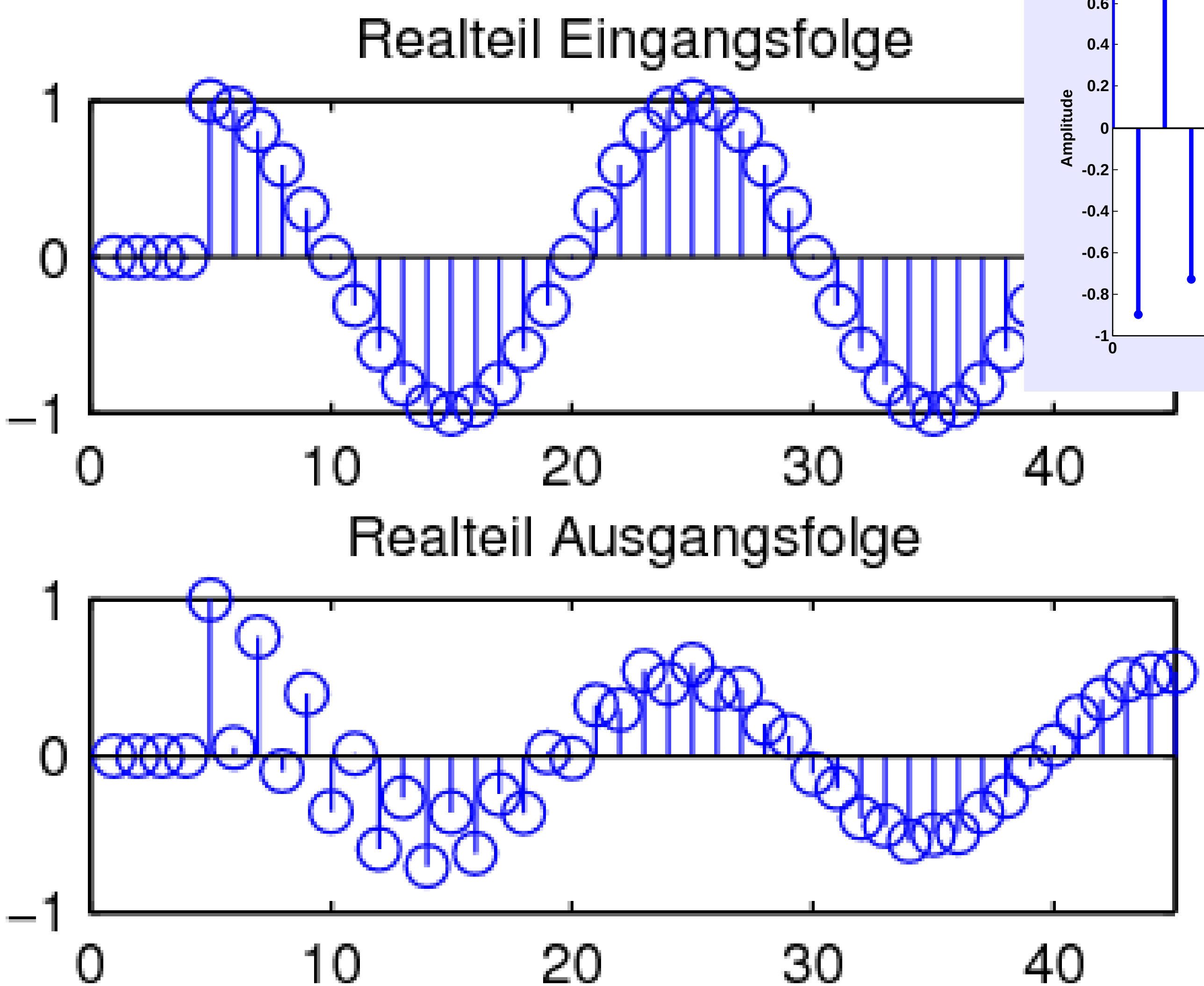
$$0.4980 e^{-j0.3313} (-0.9)^n \delta_{-1}[n]$$

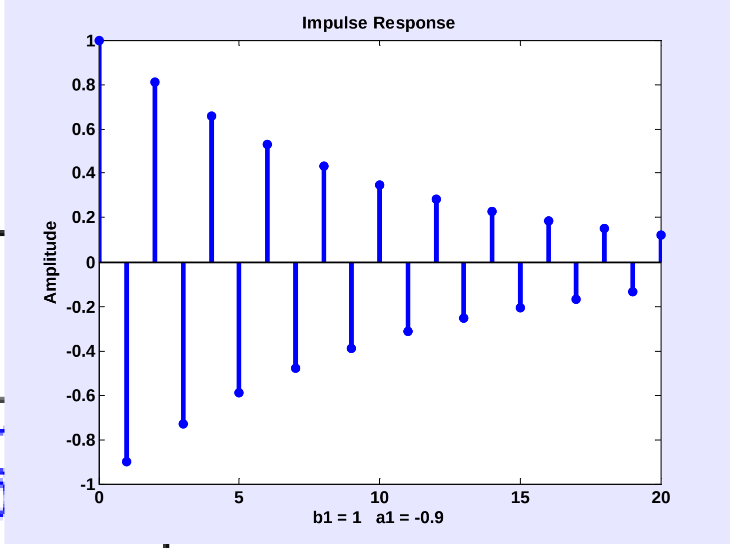
$$y[n]_2 = \left(\frac{1}{1 + 0.9 e^{-j0.2\pi}} \right) e^{j0.2\pi n} \delta_{-1}[n] = 0.5533 e^{j0.2971} e^{j0.2\pi n} \delta_{-1}[n] =$$

$$= 0.5533 \cos(0.2\pi n + 0.2971) \delta_{-1}[n]$$

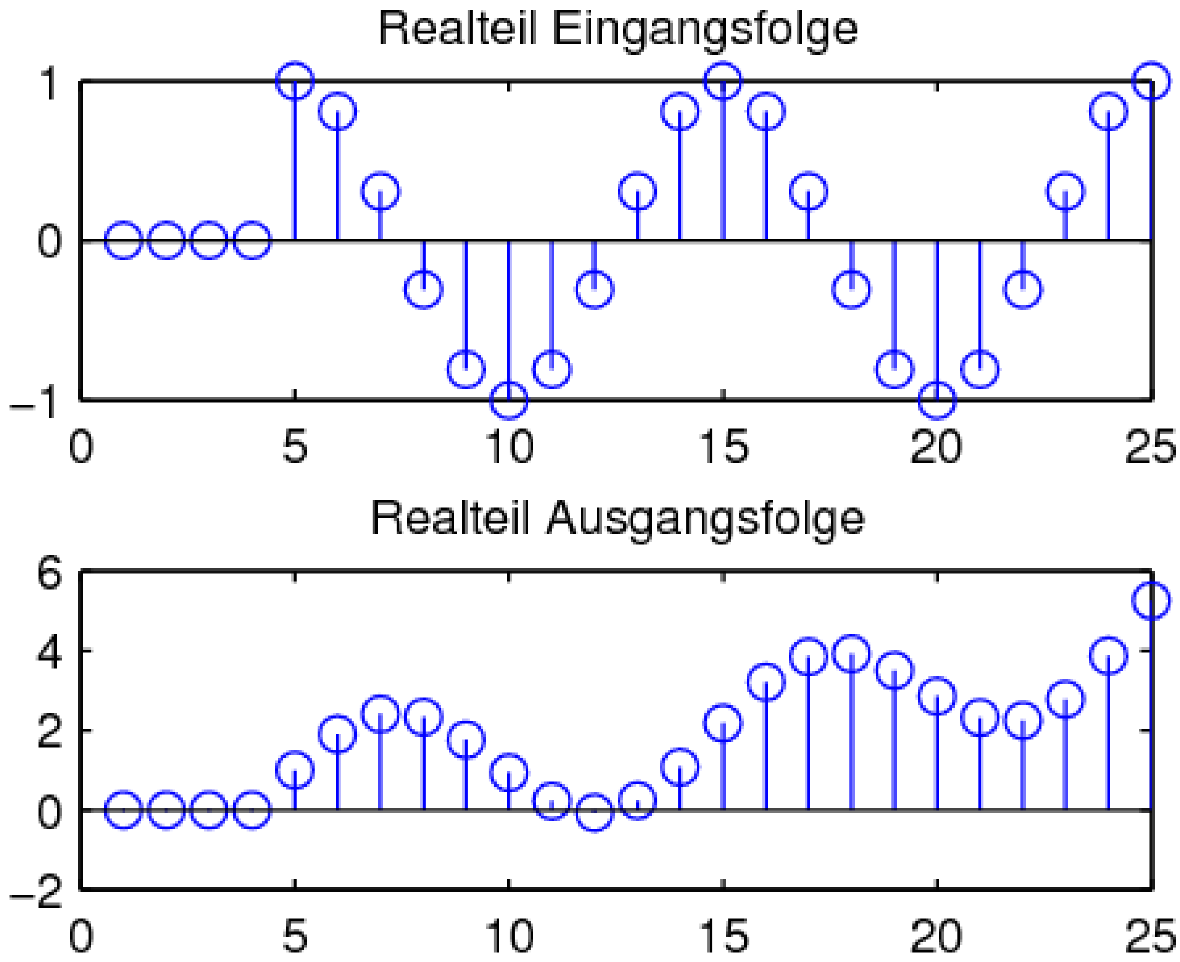
$$+ j0.5533 \sin(0.2\pi n + 0.2971) \delta_{-1}[n]$$

$$y[n] = y[n]_1 + y[n]_2$$


Realteil Eingangsfolge
1
0
−1
0
10
20
30
40
Realteil Ausgangsfolge
1
0
−1
0
10
20
30
40


Impulse Response
Amplitude
1
0.8
0.6
0.4
0.2
0
-0.2
-0.4
-0.6
-0.8
-1
0
5
10
15
20
b1 = 1 a1 = -0.9

Instabiles System Pole bei $a_1 = 1.1$



IIR-Systeme 2. Ordnung

$$y[n] = a_1 y[n-1] + a_2 y[n-2] + b_o x[n] + b_1 x[n-1] + b_2 x[n-2]$$

$$Y(z) = a_1 z^{-1} Y(z) + a_2 z^{-2} Y(z) + b_o X(z) + b_1 z^{-1} X(z) + b_2 z^{-2} X(z)$$

$$H(z) = \frac{b_o + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2}}{1 - a_1 z^{-1} - a_2 z^{-2}}$$

Pole und Nullstellen

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{b_0 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2}}{1 - a_1 z^{-1} - a_2 z^{-2}} = \frac{b_0 z^2 + b_1 z + b_2}{z^2 - a_1 z - a_2}$$

Ein Polynom des Grades *N* hat *N* Wurzeln. Wenn die Koeffizienten des Polynoms reell sind, dann sind die Wurzeln entweder reell oder konjugiert komplex.

Impulsantwort

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{b_0 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2}}{1 - a_1 z^{-1} - a_2 z^{-2}}$$

$$H(z) = \left(-\frac{b_2}{a_2}\right) + \frac{A_1}{1 - p_1 z^{-1}} + \frac{A_2}{1 - p_2 z^{-1}}$$

$$h[n] = \left(-\frac{b_2}{a_2}\right)\delta_0[n] + A_1 p_1{}^n \delta_{-1}[n] + A_2 p_2{}^n \delta_{-1}[n]$$

Reelle Pole

$$H(z) = \frac{1}{1 - \frac{5}{6} z^{-1} + \frac{1}{6} z^{-2}} = \frac{1}{(1 - \frac{1}{2} z^{-1})(1 - \frac{1}{3} z^{-1})}$$

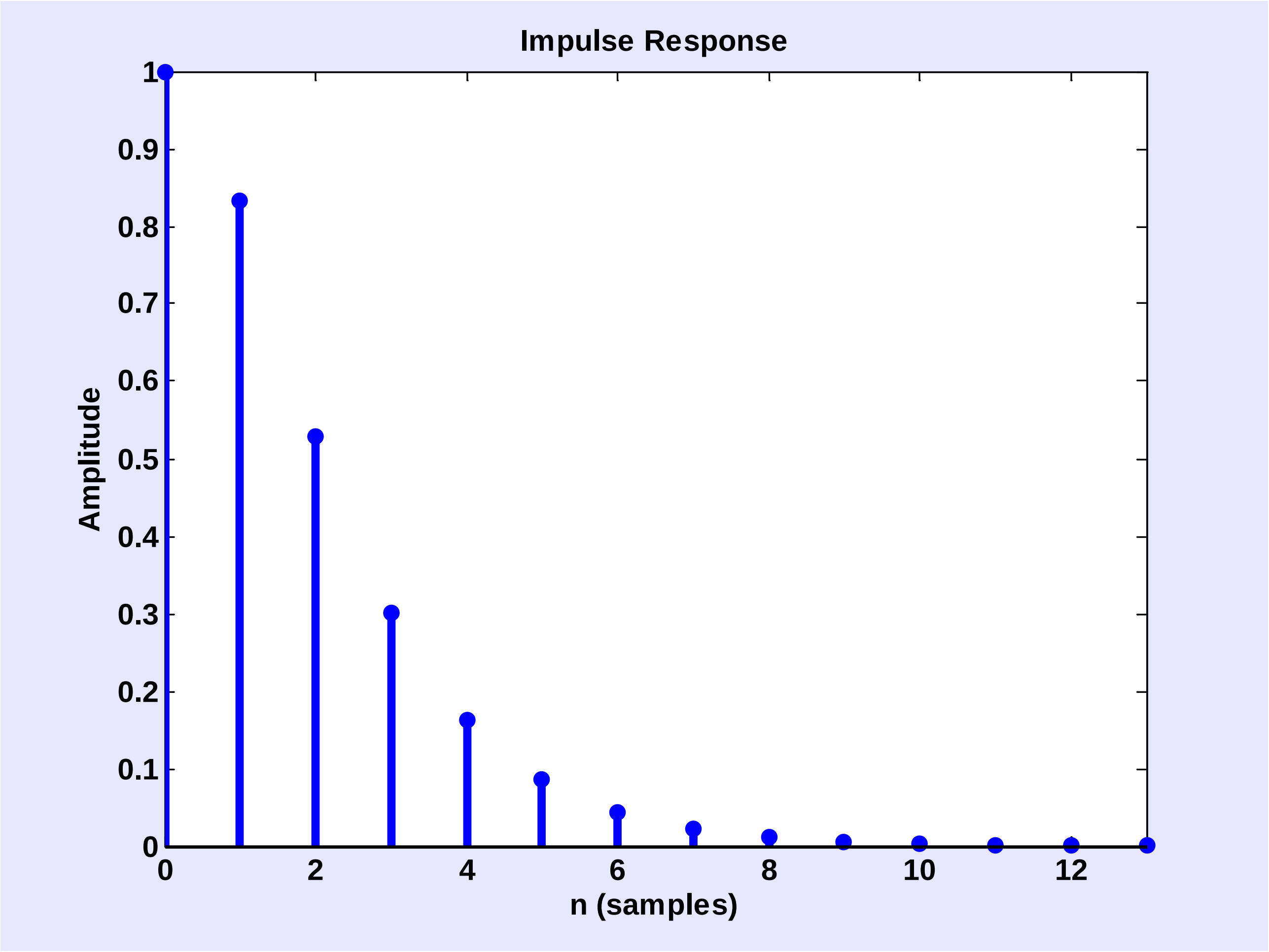
$$H(z) = \frac{3}{(1 - \frac{1}{2} z^{-1})} - \frac{2}{(1 - \frac{1}{3} z^{-1})}$$

$$h[n] = 3\left(\tfrac{1}{2}\right)^{n} \delta_{-1}[n] - 2\left(\tfrac{1}{3}\right)^{n} \delta_{-1}[n]$$

Wenn p_1 und p_2 reell sind, dann besteht die Impulsantwort aus zwei Funktionen der Form $p_k^{\,n}$.

$$B=[1]; \quad A=\left[1,-\tfrac{5}{6},\tfrac{1}{6}\right]$$

impz(B,A)



Konjugiert komplexe Pole

Komplexe Pole auf dem Einheitskreis

$$H(z) = \frac{1+z^{-1}}{(1-e^{j\pi/4}z^{-1})(1-e^{-j\pi/4}z^{-1})} = \frac{1+z^{-1}}{1-1.4142z^{-2}+z^{-2}}$$

$$\Downarrow$$

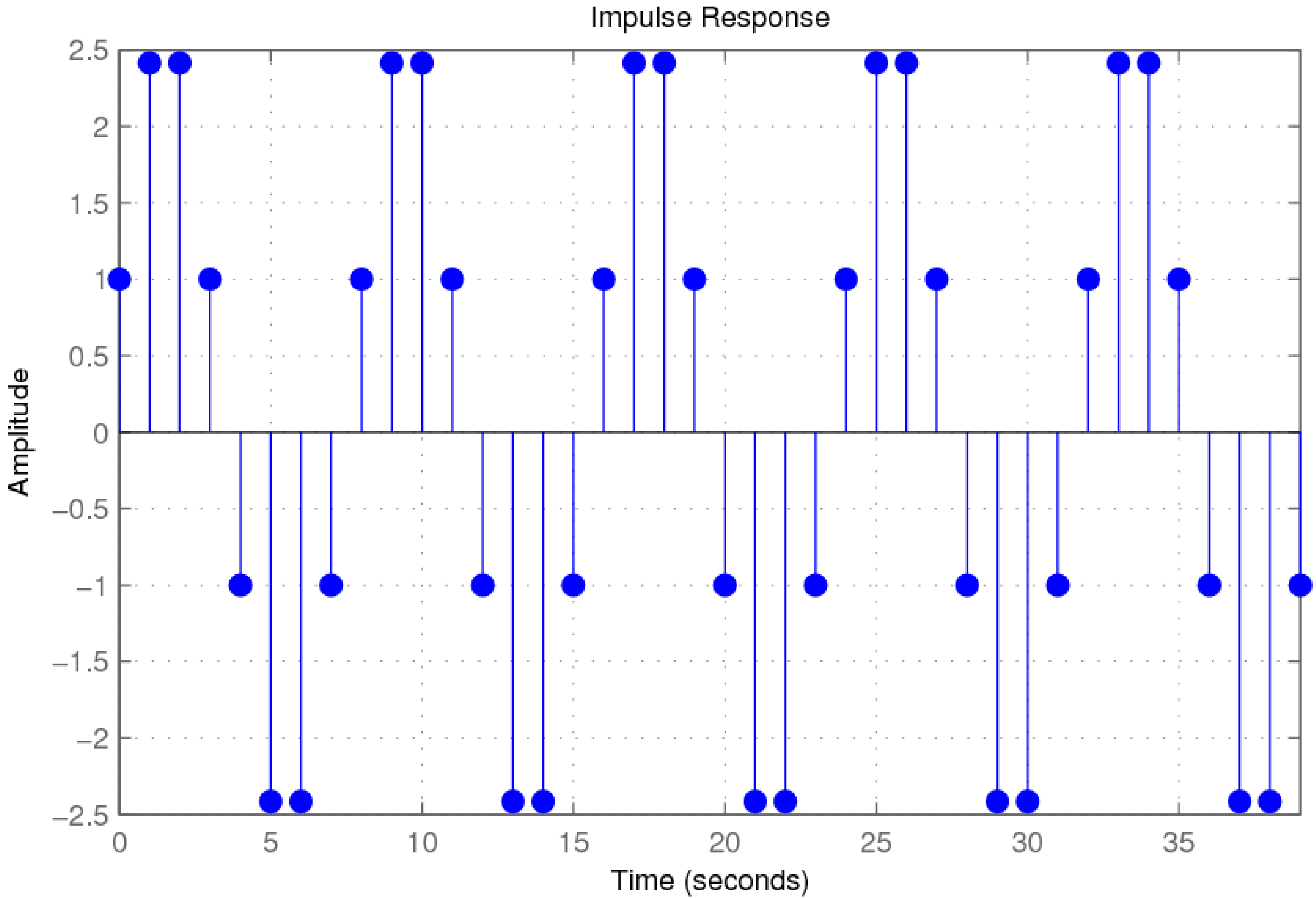
$$H(z) = \frac{1.3066e^{-j1.1781}}{(1-e^{j\pi/4}z^{-1})} + \frac{1.3066e^{j1.1781}}{(1-e^{-j\pi/4}z^{-1})}$$

$$\Downarrow$$

$$h[n] = 1.3066e^{-j1.1781}e^{(j\pi/4)n}\delta_{-1}[n] + 1.3066e^{j1.1781}e^{-j(\pi/4)n}\delta_{-1}[n]$$

$$\Downarrow$$

$$h[n] = 2 * 1.3066\cos\left(\frac{\pi}{4}n - 1.1781\right)\delta_{-1}[n]$$

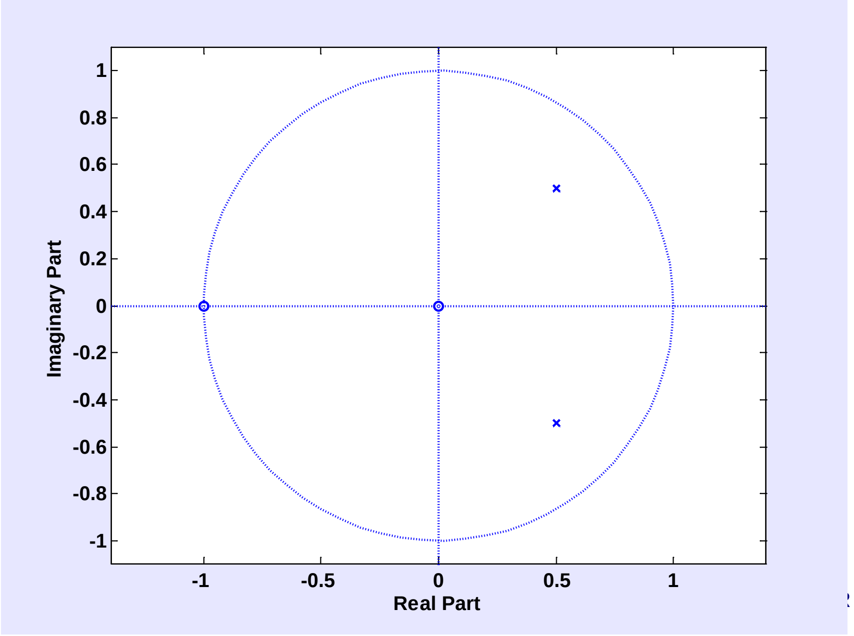


Pole konjugiert komplex auf dem Einheitskreis
➔ Second-Order Oscillator

Komplexe Pole innerhalb des Einheitskreises

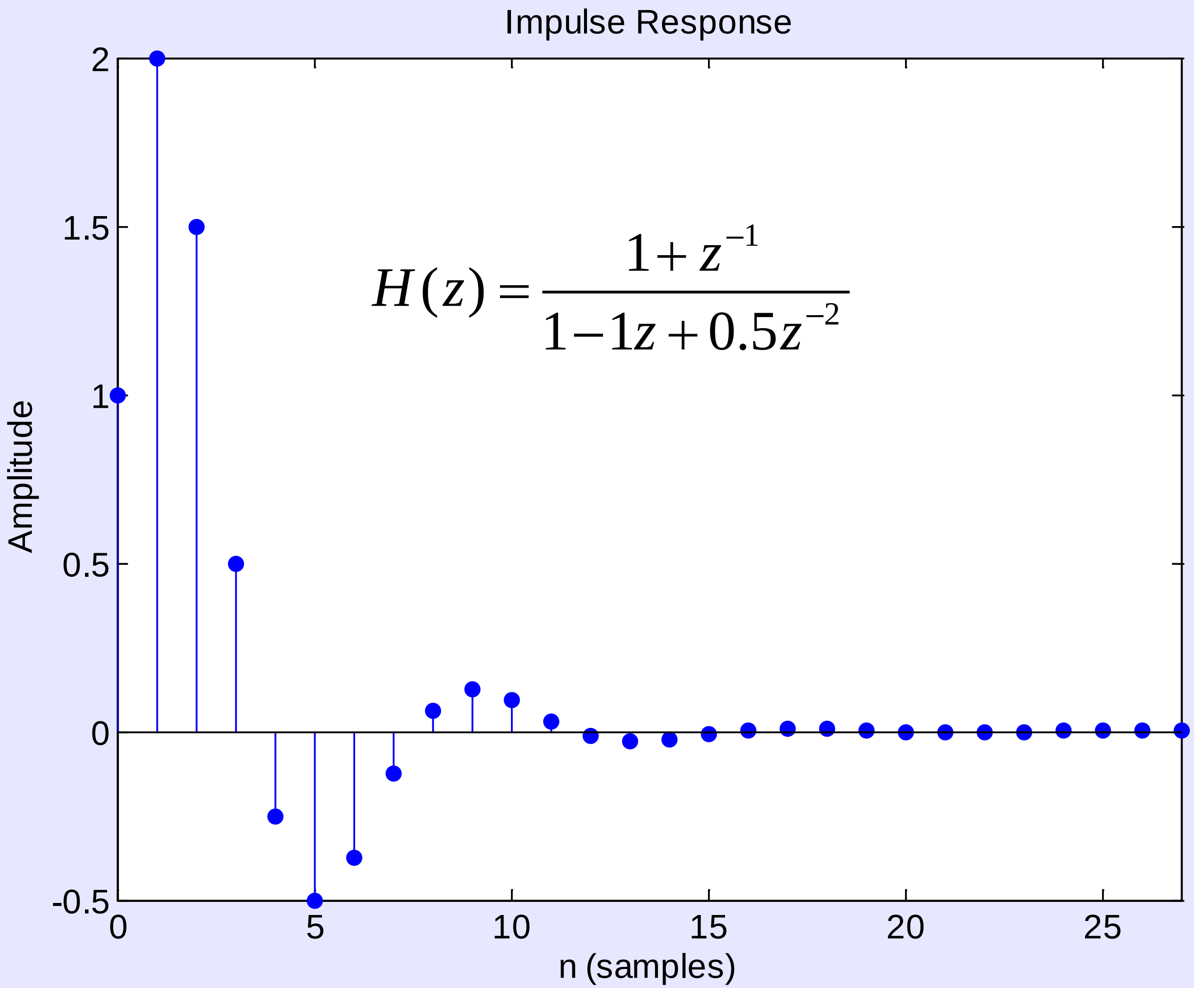
$$H(z)=\frac{1+z^{-1}}{1-1z+0.5z^{-2}}=\frac{1+z^{-1}}{(1-\frac{1}{\sqrt{2}}e^{j\pi/4}z^{-1})(1-\frac{1}{\sqrt{2}}e^{-j\pi/4}z^{-1})}$$

$$=\frac{1.5811e^{-j1.2490}}{(1-\frac{1}{\sqrt{2}}e^{j\pi/4}z^{-1})}+\frac{1.5811e^{j1.2490}}{(1-\frac{1}{\sqrt{2}}e^{-j\pi/4}z^{-1})}$$




```
B = [1 1]; A = [1 -1 0.5]
zplane(B,A)
```

$$h[n] = 2 \times 1.5811 \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \right)^n \cos\left(\frac{\pi}{4} n - 1.249 \right)$$



$$\left(\sin\omega_0 n\right)\delta_{-1}[n] \Leftrightarrow \frac{(\sin\omega_0)z^{-1}}{1-2(\cos\omega_0)z^{-1}+z^{-2}}$$

$$\left(\cos\omega_0 n\right)\delta_{-1}[n] \Leftrightarrow \frac{1-(\cos\omega_0)z^{-1}}{1-2(\cos\omega_0)z^{-1}+z^{-2}}$$

$$\left(r^n\cos\omega_0 n\right)\delta_{-1}[n] \Leftrightarrow \frac{1-(r\cos\omega_0)z^{-1}}{1-(2r\cos\omega_0)z^{-1}+r^2z^{-2}}$$

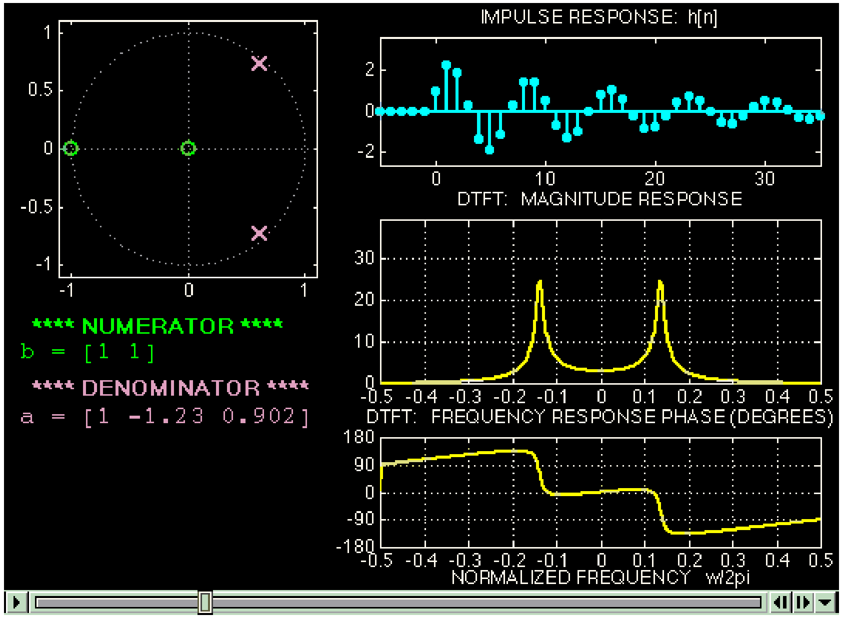
$$\left(r^n\sin\omega_0 n\right)\delta_{-1}[n] \Leftrightarrow \frac{(r\sin\omega_0)z^{-1}}{1-(2r\cos\omega_0)z^{-1}+r^2z^{-2}}$$

$$K\cdot r^n\cos(\omega_0 k+\varphi)\delta_{-1}[n] \Leftrightarrow \frac{0.5Ke^{j\varphi}}{1-re^{j\omega_0}z^{-1}}+\frac{0.5Ke^{-j\varphi}}{1-re^{-j\omega_0}z^{-1}}$$

$$K\cdot r^n\cos(\omega_0 k+\varphi)\delta_{-1}[n] \Leftrightarrow \frac{b_0+b_1z^{-1}}{1+2az^{-1}+r^2z^{-2}}$$

$$K=\sqrt{\frac{b_1^2r^2+b_0^2-2ab_0b_1}{r^2-a^2}} \qquad \omega_0=\arccos\left(\frac{-a}{r}\right) \qquad \varphi=\arctan\left(\frac{ab_0-b_1}{r^2-a^2}\right)$$

PN-Video


IMPULSE RESPONSE: h[n]
DTFT: MAGNITUDE RESPONSE
DTFT: FREQUENCY RESPONSE PHASE (DEGREES)
NORMALIZED FREQUENCY w/2pi
**** NUMERATOR ****
b = [1 1]
**** DENOMINATOR ****
a = [1 -1.23 0.902]

Filterdesign