

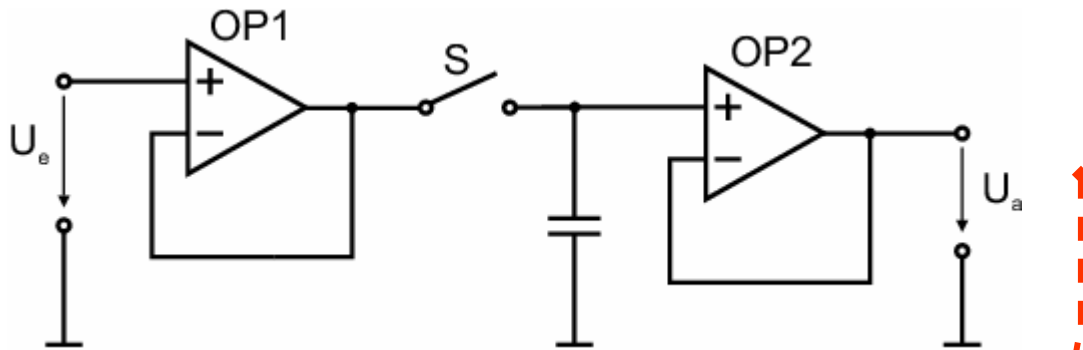
Digital ↔ Analog

1. Digitale Signale weniger stör anfällig als analoge (Signalzustände nur 0 und 1), rekonstruierbar wenn Störungen unterhalb der Erkennungspegel für 0 und 1 liegen, z.B. Übertragungsleitungen über große Distanzen.
2. Digitale Signale lassen sich einfacher kodieren (Kompression oder Sicherheit) und verarbeiten als analoge Signale.

3. Vervielfältigung digitaler Daten sehr einfach. Analoge Daten (Filme, Tonbänder) verlieren bei jeder Vervielfachung Qualität durch unvermeidbare Störsignale.
4. Speichern von digitalen Signalen einfacher und kostengünstiger als bei analogen Signalen.
5. Digitale Hardware einfacher und kostengünstiger als analoge Komponenten. Kosten digitaler Hardware nehmen laufend durch die Entwicklung moderner Chip-technologie ab.

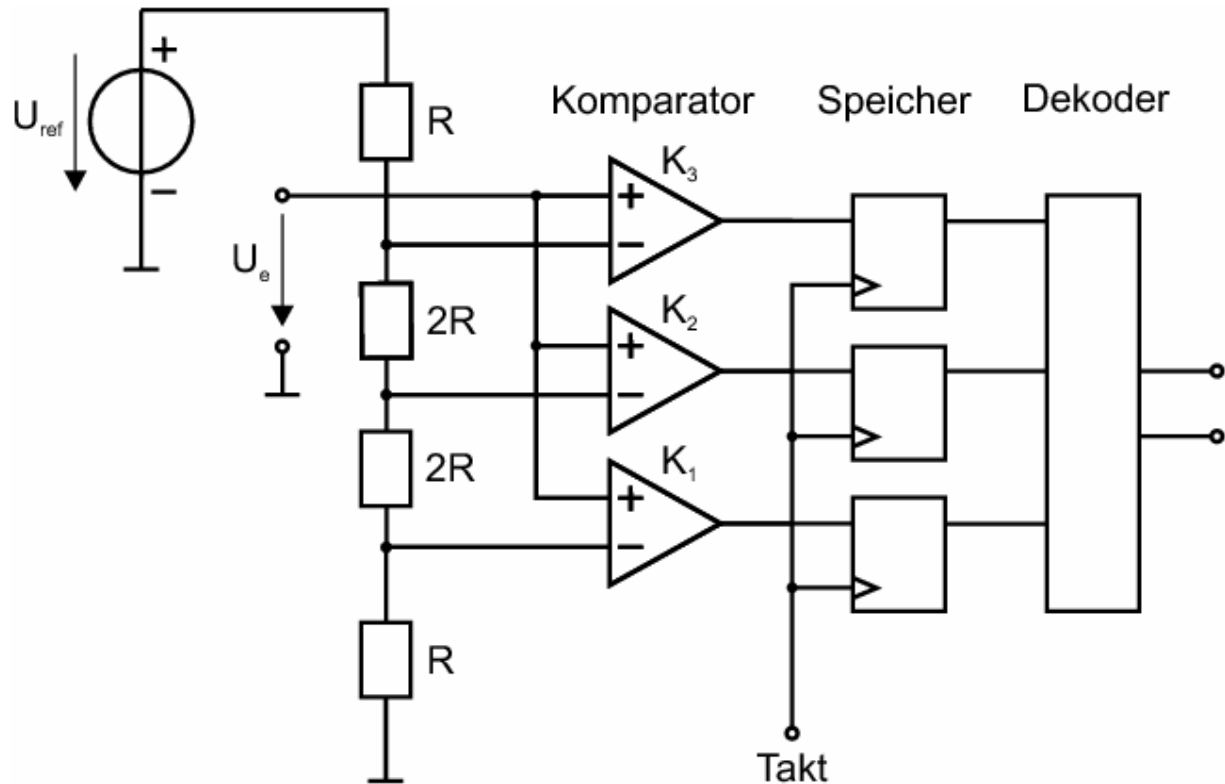
7. Es geht aber nicht ohne analoge Systeme: Antialiasing und Interpolation.
8. Der Großteil der Signale ist analog.
9. Abtasttheorem und A/D- und D/A-Wandlung begrenzen die Einsatzmöglichkeiten aus technologischen Gründen.
10. Echtzeit-DSP im Audiodbereich erst teilweise im Videobereich.

A/D-Umsetzung



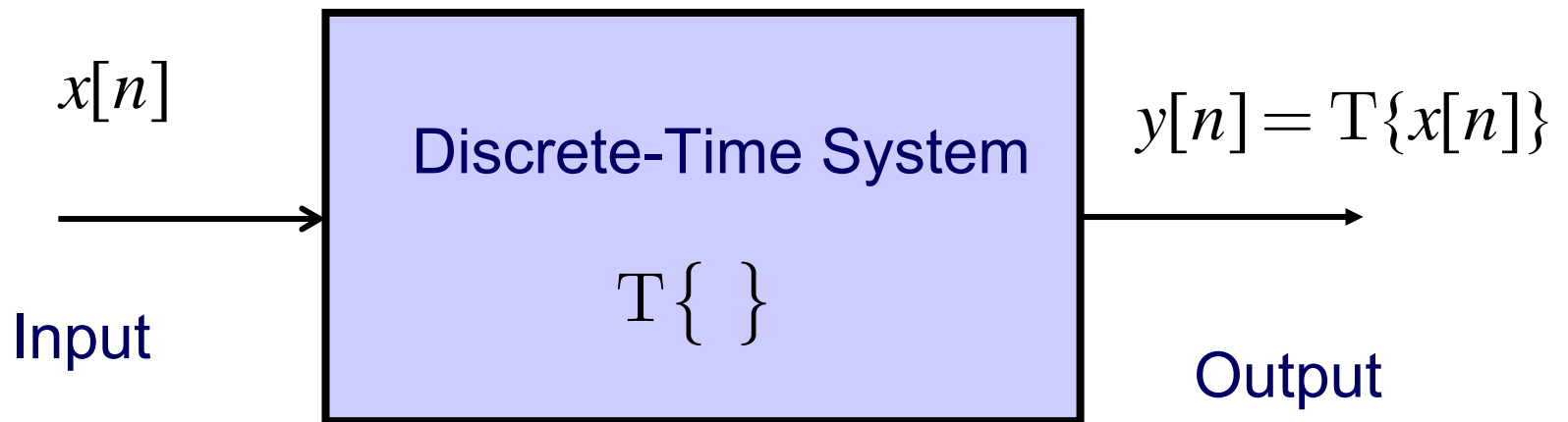
S&H-Schaltung

A/D-Wandler



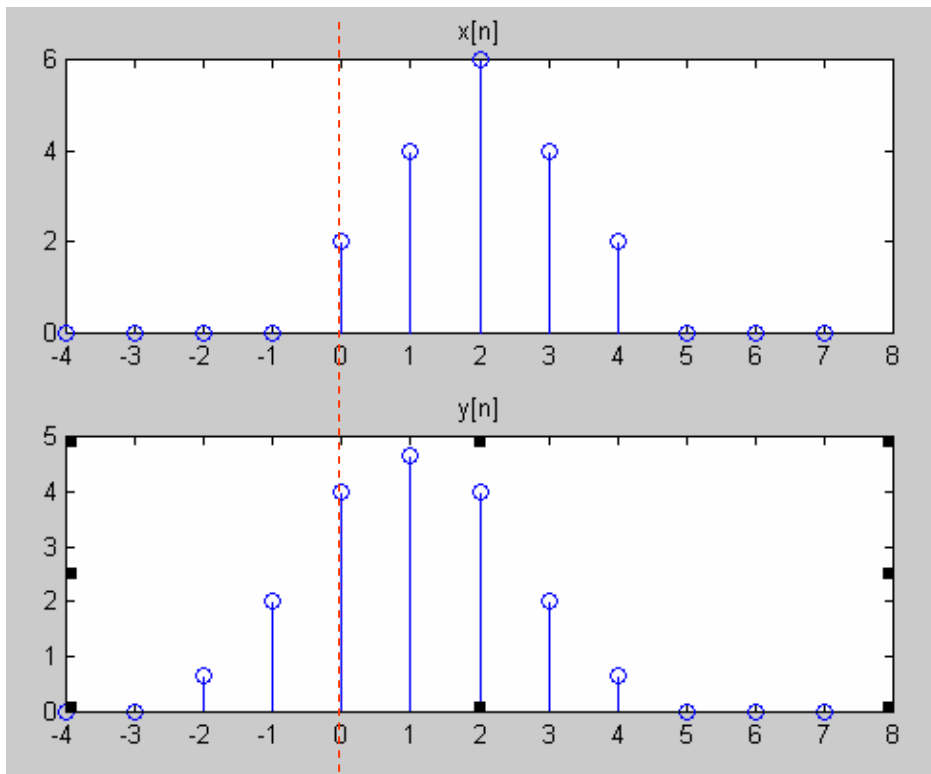
Finite Impulse Response Filter

Nichtrekursive Filter



3 point running average

n	$n < -2$	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6	7	$n > 7$
$x[n]$	0	0	0	2	4	6	4	2	0	0	0	0
$y[n]$	0	2/3	2	4	14/3	4	2	2/3	0	0	0	0



$$y[0] = \frac{1}{3}(x[0] + x[1] + x[2])$$

$$y[1] = \frac{1}{3}(x[1] + x[2] + x[3])$$

...

$$y[n] = \frac{1}{3}(x[n] + x[n+1] + x[n+2])$$

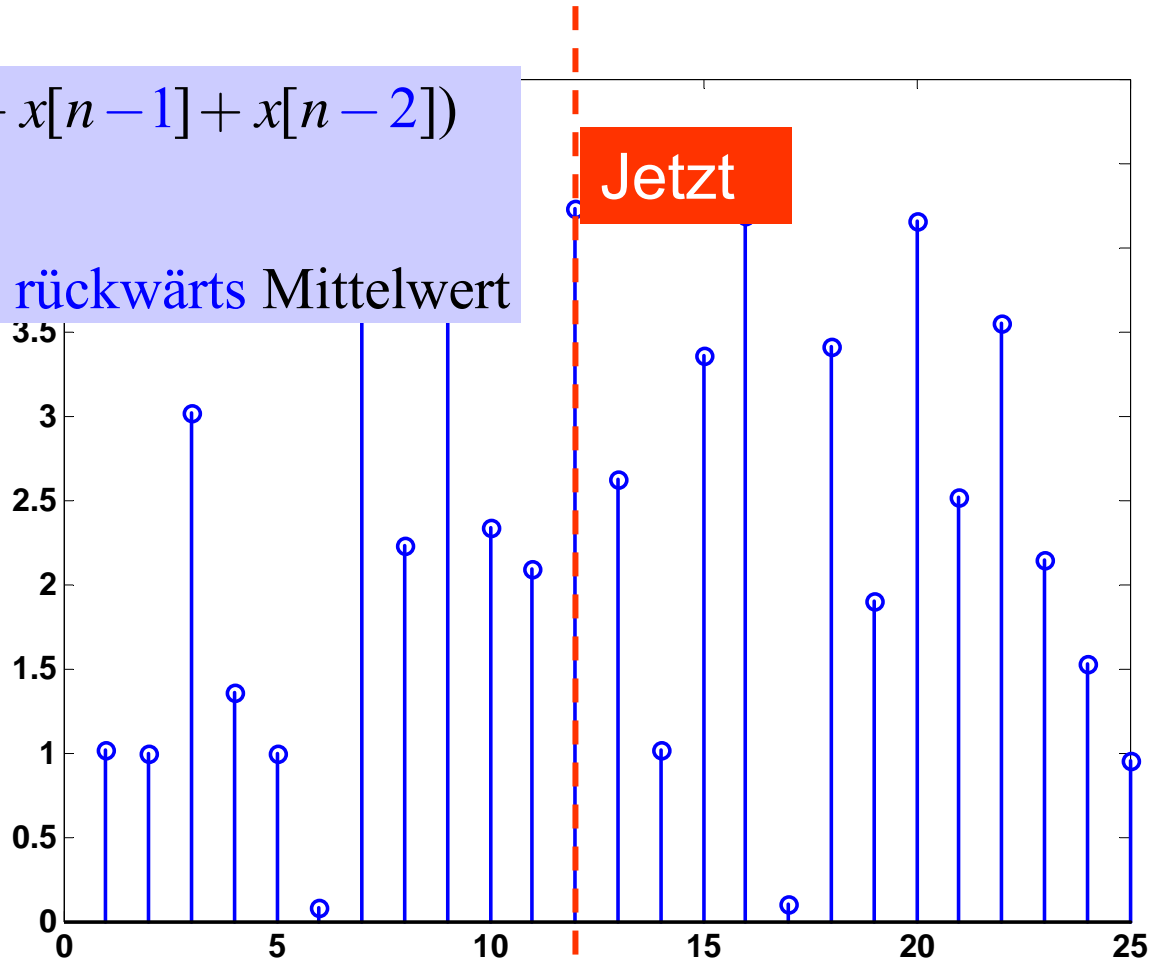
Filtergleichung

Ausgang vor Eingang: nicht kausal!

Kausalität

$$y[n] = \frac{1}{3}(x[n] + x[n-1] + x[n-2])$$

vorwärts bzw. rückwärts Mittelwert



← Vergangenheit

Zukunft →

Allgemeines FIR Filter

$$y[n] = \sum_{k=0}^M b_k x[n-k]$$

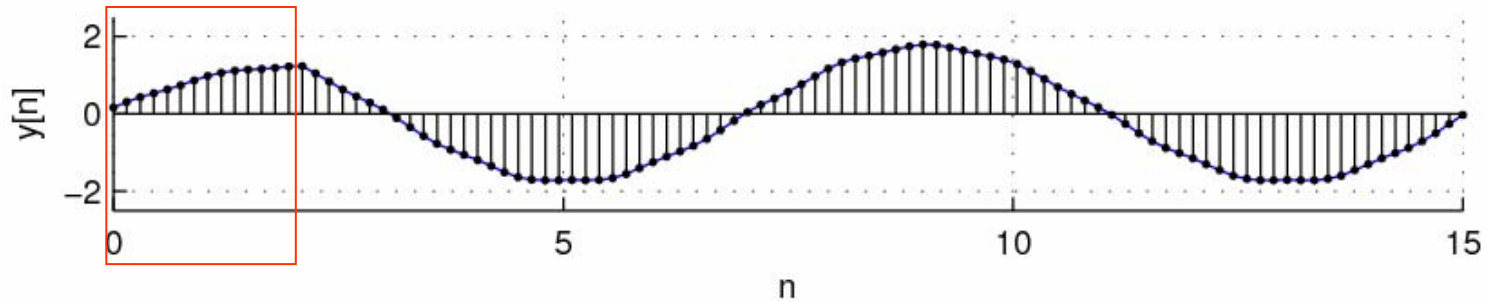
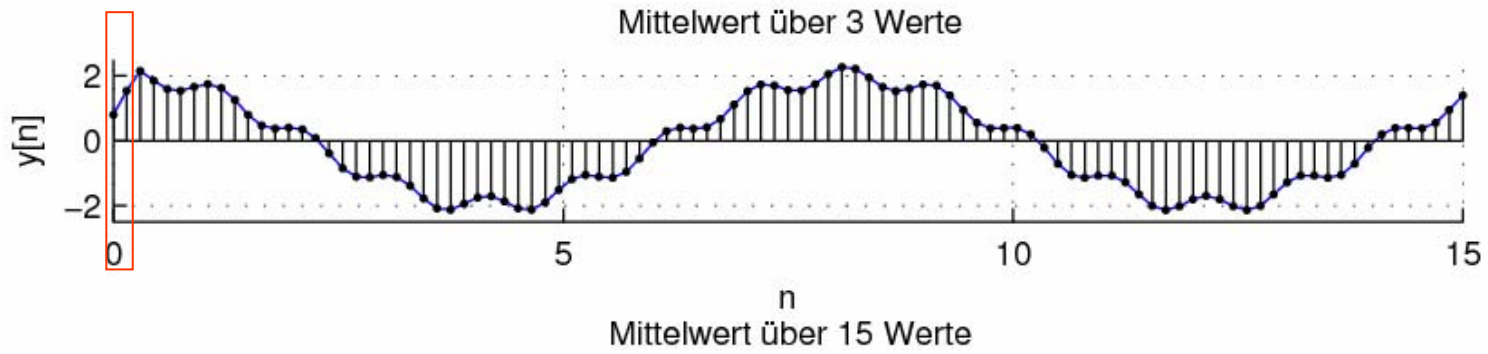
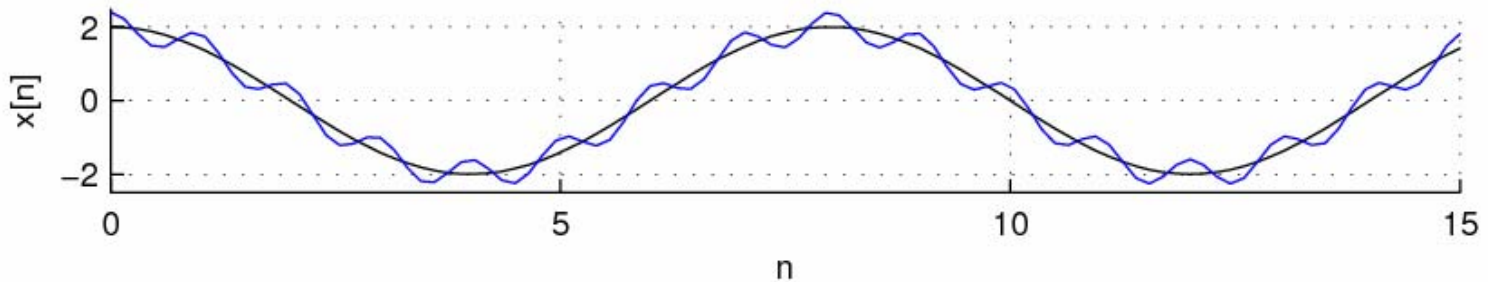


Ordnung des Filters M ,

Zahl der Filterkoeffizienten: Länge des Filters $L = M + 1$

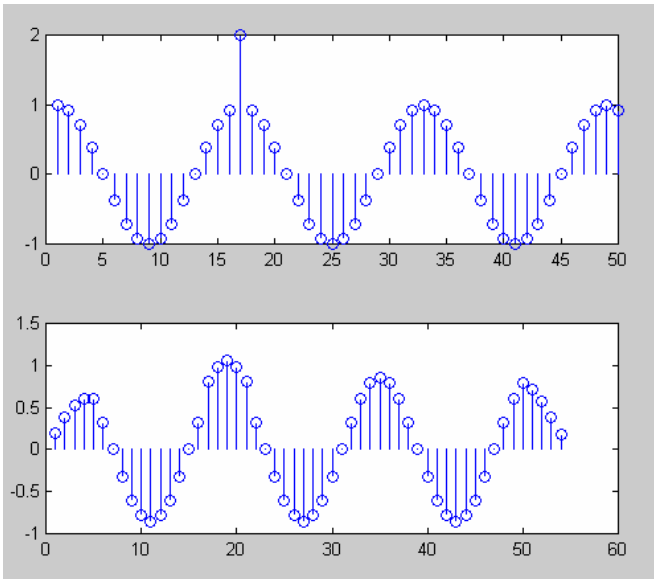
z.B.: $y[n] = \frac{1}{3} x[n] + \frac{1}{3} x[n-1] + \frac{1}{3} x[n-2]$

Beispiel



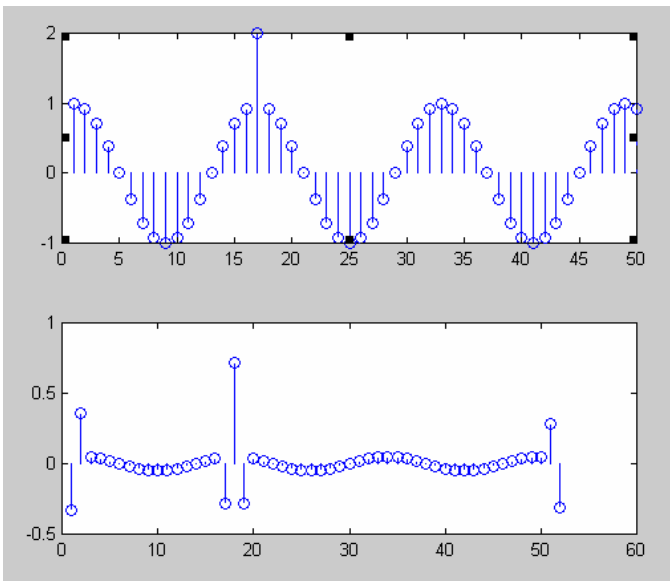
- Wir beobachten eine M-Punkte lange Anklingphase (Abklingphase beim Ausschalten).
- Die Sinuskomponente höherer Frequenz wird stärker unterdrückt als die Komponente niedrigerer Frequenz
→ Tiefpassverhalten
- Das Ausgangssignal ist gegen das Eingangssignal verschoben.

- **Anwendung:** Unterdrücken von unerwünschten **hohen** Frequenz-Komponenten,
z.B. Netzbrummen ==> Tiefpass
- **Anwendung:** Unterdrückung von unerwünschten **niedrigen** Frequenz-Komponenten,
z.B. Netzbrummen ==> Hochpass



$$y[n] = \frac{1}{3}(x[n] + x[n-1] + x[n-2])$$

$$b_k = \frac{1}{3} \quad \frac{1}{3} \quad \frac{1}{3}$$



$$y[n] = x[n-2] - \left(\frac{1}{3}x[n-1] + \frac{1}{3}x[n-2] + \frac{1}{3}x[n-3]\right)$$

Durchschnittswert wird vom **Momentanwert** subtrahiert.

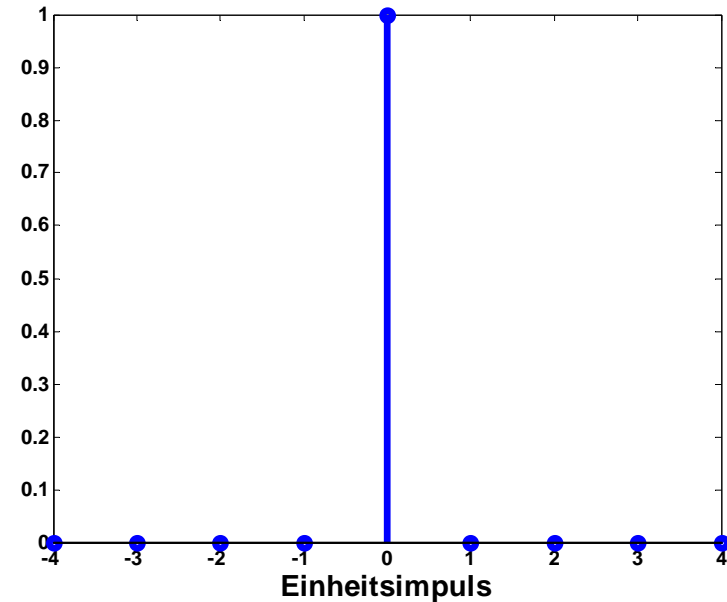
$$b_k = -\frac{1}{3} \quad \frac{2}{3} \quad -\frac{1}{3}$$

Unit Impuls

Einheits(im)puls, Stoßfunktion, Dirac-Impuls

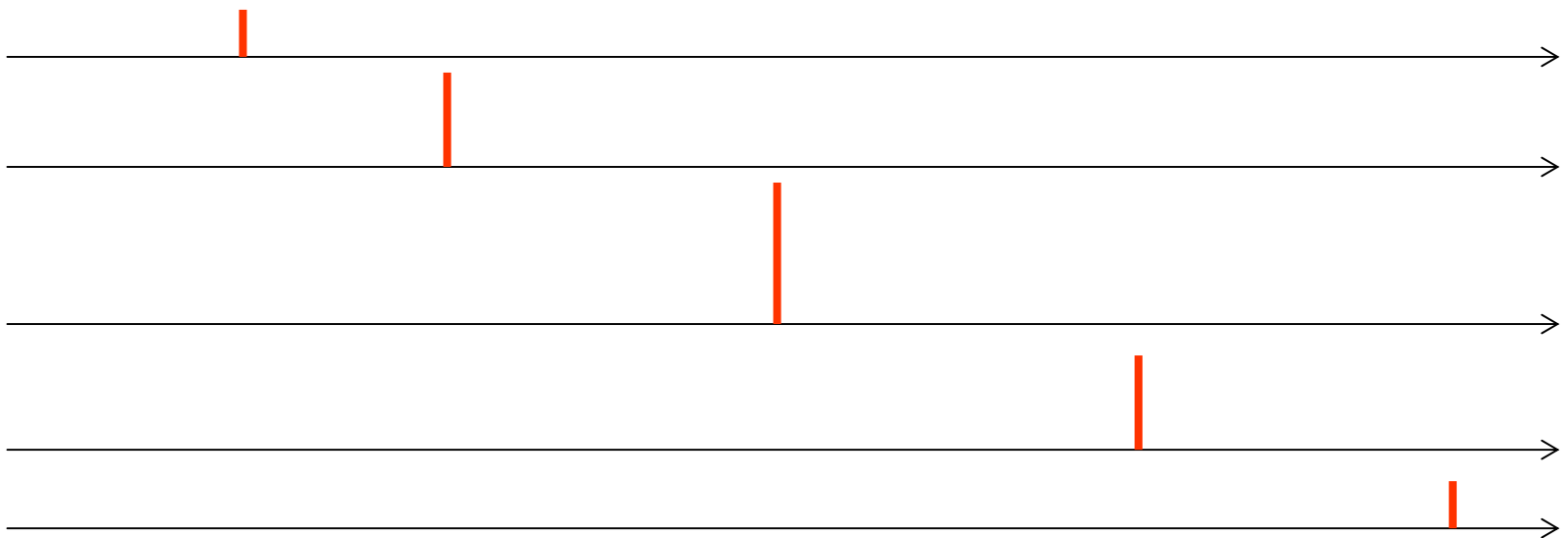
$$\delta[n] = \begin{cases} 1 & n = 0 \\ 0 & n \neq 0 \end{cases}$$

n	...	-2	-1	0	1	2	3
$\delta[n]$	0	0	0	1	0	0	0
$\delta[n-2]$	0	0	0	0	0	1	0



Signaldarstellung durch Einzelimpulse

$$x[n] = 2\delta[n] + 4\delta[n-1] + 6\delta[n-2] + 4\delta[n-3] + 2\delta[n-4]$$



$$x[n] = \sum_k x[k] \delta[n-k]$$

Unit Impuls Response

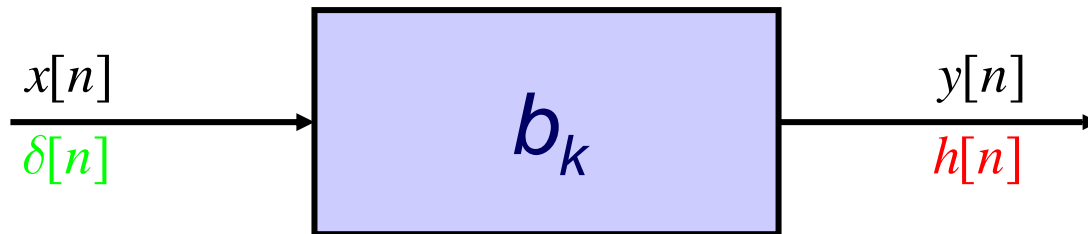
Impulsantwort

Eingang: Einheitspuls Ausgang: Impulsantwort

$$y[n] = \sum_{k=0}^M b_k x[n-k]$$

$$x[n] = \delta[n]$$

$$y[n] = h[n] = \sum_{k=0}^M b_k \delta[n-k] = \begin{cases} b_n & n = 0, 1, 2, \dots, M \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$



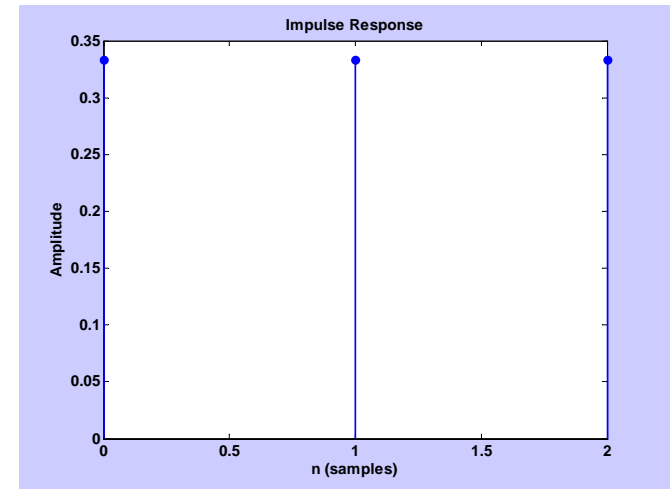
Beispiel

Running Average Filter $b_0 = b_1 = b_2 = \frac{1}{3}$

$$y[n] = b_0 \delta[n] + b_1 \delta[n - 1] + b_2 \delta[n - 2]$$

Die Impulsantwort ist die Folge der Filterkoeffizienten.

$h[n] = 0$ für $n < 0$ und für $n > M$



```
B = [1 1 1]/3  
A = 1  
impz(B,A)
```

Die Länge der Impulsantwort ist endlich

→ finite impulse response

Delay (Laufzeit) Filter

$$y[n] = x[n - n_0]$$

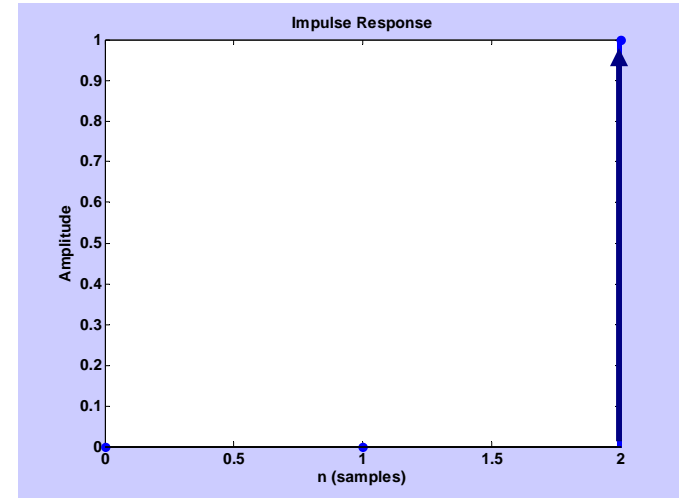
Filterkoeffizienten

$$\{b_k\} = \{0, 0, 1\}$$

$$y[n] = b_0 \cdot x[n] + b_1 \cdot x[n - 1] + b_2 \cdot x[n - 2]$$

$$\underbrace{\quad}_0 \quad \underbrace{\quad}_0 \quad \underbrace{\quad}_{1 \cdot x[n - 2]}$$

$$y[n] = x[n - 2] \quad \text{Verzögerung um zwei Takte}$$



`impz([0 0 1],1)`

Convolution (Faltung)

$$y[n] = \sum_{k=0}^M b_k x[n-k]$$

Die Filterkoeffizienten sind identisch mit der Impulsantwort des Filters.

b_k kann durch $h[k]$ ersetzt werden.

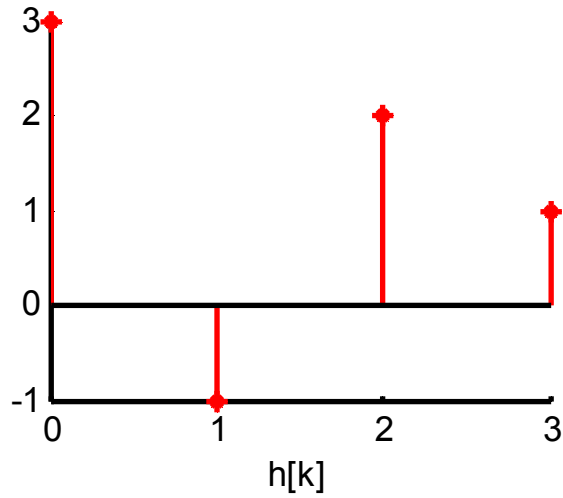
$$y[n] = \sum_{k=0}^M h[k] x[n-k]$$

Faltung

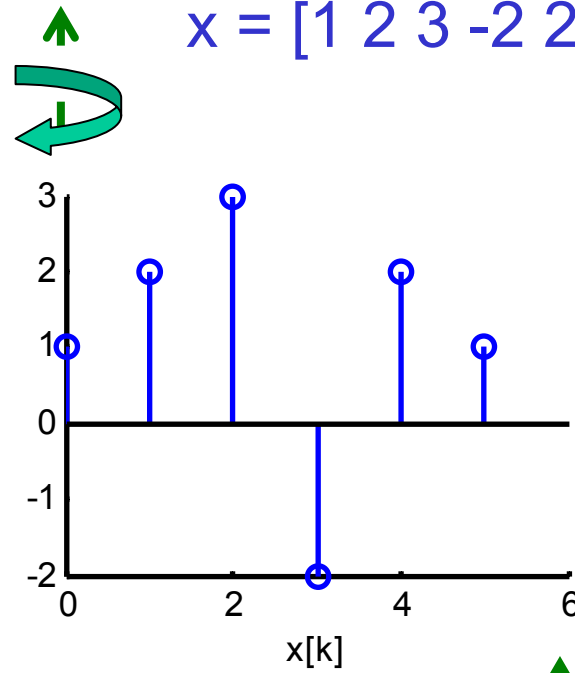
$$y[n] = \sum_{k=0}^M h[k]x[n-k]$$

Die Berechnung des Wertes $y[n]$ der Ausgangsfolge erfolgt durch Berechnung des Summenausdrucks für den Parameter n .

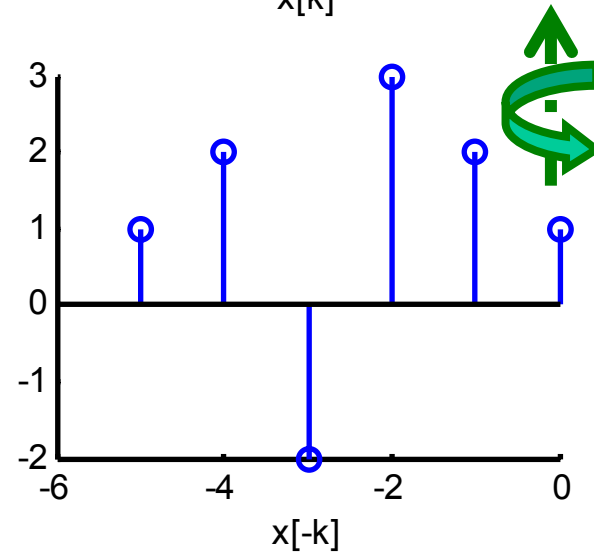
$$h = [3 \ -1 \ 2 \ 1]$$



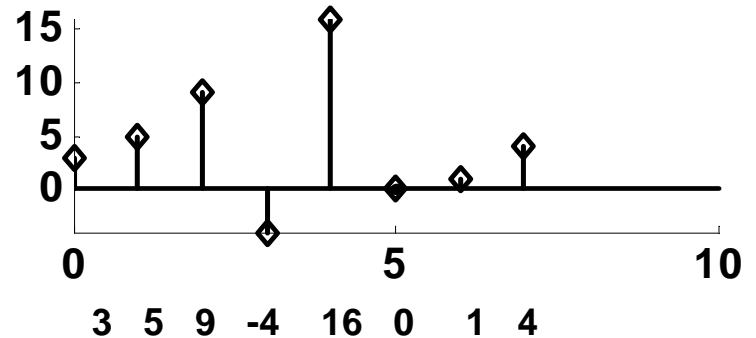
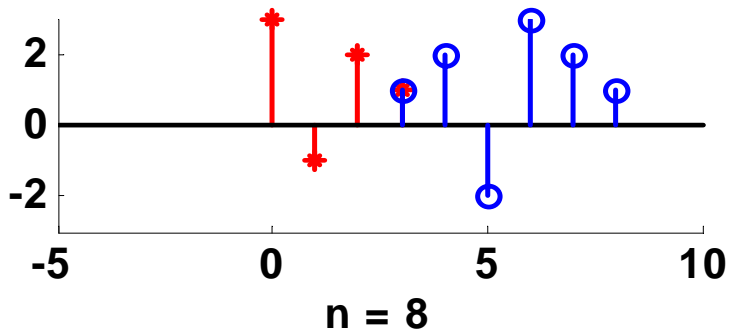
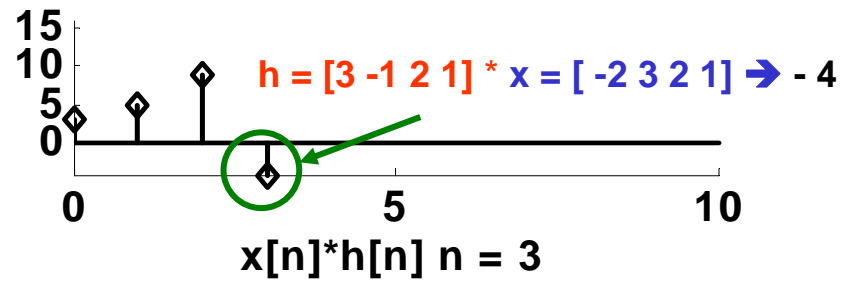
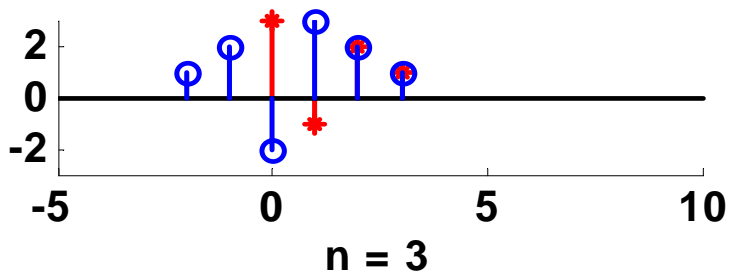
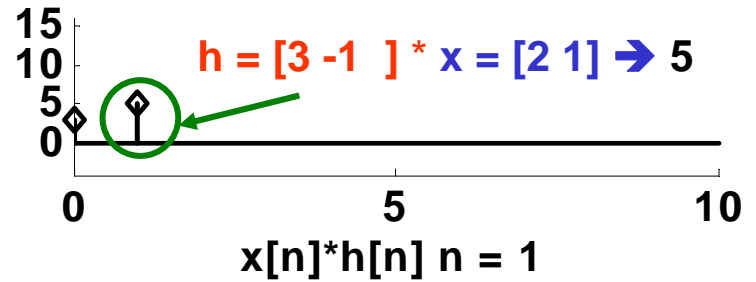
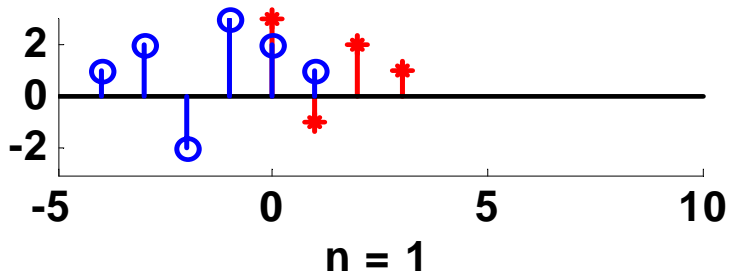
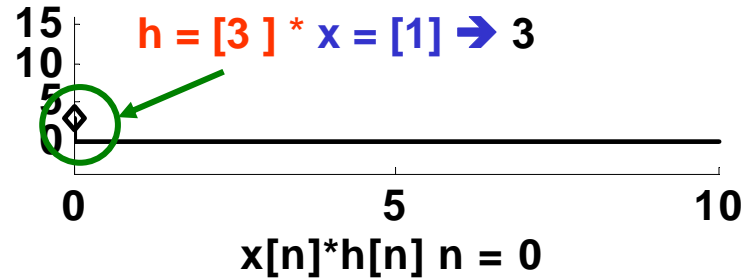
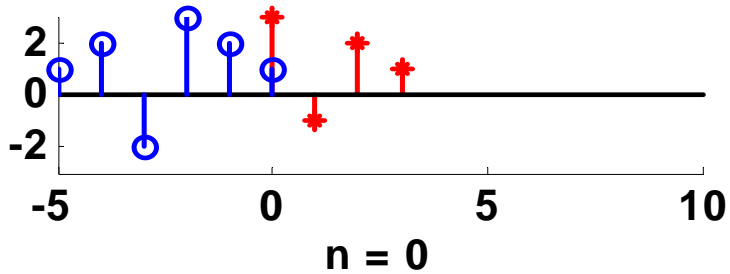
$$x = [1 \ 2 \ 3 \ -2 \ 2 \ 1]$$



gefaltet



$h = [3 \ -1 \ 2 \ 1]$ $x = [1 \ 2 \ 3 \ -2 \ 2 \ 1]$



Faltung

- Wir betrachten wie jeder einzelne Wert des Eingangssignals zu den Punkten des Ausgangssignals beiträgt.
- Wir betrachten, wie jeder einzelne Wert des Ausgangssignals aus den Punkten des Eingangssignals gebildet wird.

Wirkung des Eingangssignals

$x[0] = 1$	$y[0] = [1]h[n-0]$	3	-1	2	1	0	0	0	0	0	0
$x[1] = 2$	$y[1] = [2]h[n-1]$	0	6	-2	4	2	0	0	0	0	0
$x[3] = 3$	$y[3] = [3]h[n-3]$	0	0	9	-3	6	3	0	0	0	0
$x[4] = -2$	$y[4] = [-2]h[n-4]$	0	0	0	-6	2	-4	-2	0	0	0
$x[5] = 2$	$y[5] = [2]h[n-5]$	0	0	0	0	6	-2	4	2	0	0
$x[6] = 1$	$x[6] = [1]h[n-6]$	0	0	0	0	0	3	-1	2	1	0
	$y[n] = \sum x[n]h[n-k]$	3	5	9	-4	16	0	1	4	1	0

Jeder Abtastwert des Eingangssignals erzeugt seine eigene  (mit der Amplitude des Eingangssignals gewichtete) **Impulsantwort.**

Die Antwort des Systems ist die Summe aller gewichteten und zeitversetzten Impulsantworten.

Zusammensetzung des Ausgangssignals

$h[0] = 3$	$y[0] = [3]x[n-0]$	3	6	9	-6	6	3	0	0	0	0
$h[1] = -1$	$y[1] = [-1]x[n-1]$	0	-1	-2	-3	2	-2	-1	0	0	0
$h[3] = 2$	$y[3] = [2]x[n-3]$	0	0	2	4	6	-4	4	2	0	0
$h[4] = 1$	$y[4] = [1]x[n-4]$	0	0	0	1	2	3	-2	2	1	0
	$y[n] = \sum h[k]x[n-k]$	3	5	9	-4	16	0	1	4	1	0



**Das Ausgangssignals ist die Summe von gewichteten und zeitversetzten Eingangssignalen.
Das Eingangssignal wird mit dem entsprechenden Wert der Impulsantwort gewichtet.**

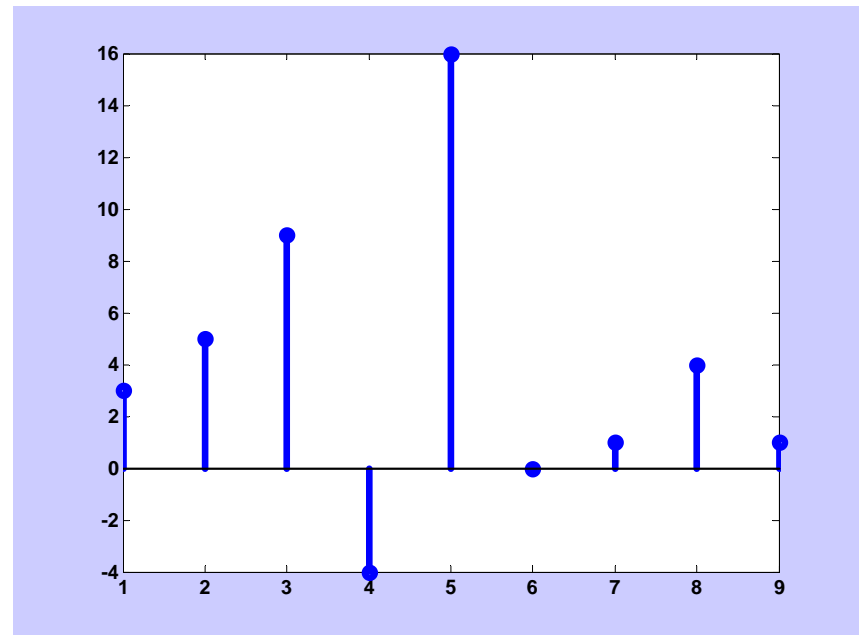
Faltung mit Matlab

x = [1 2 3 -2 2 1]

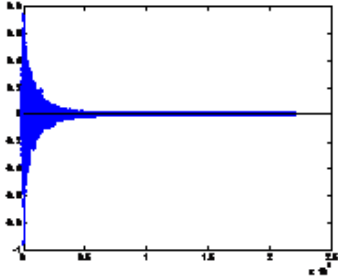
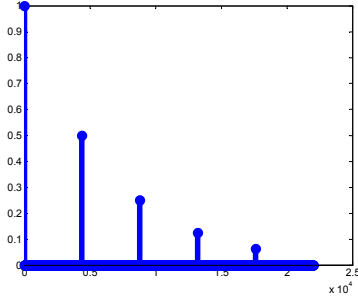
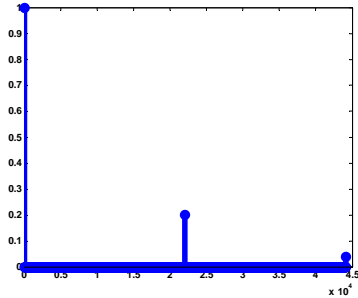
h = [3 -1 2 1]

conv(h,x) → 3 5 9 -4 16 0 1 4 1

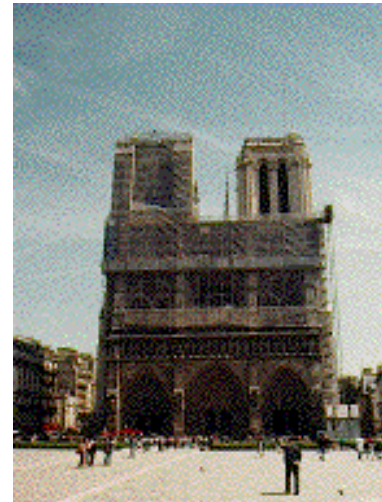
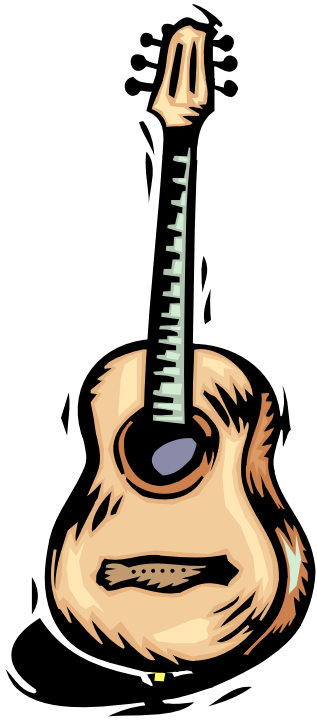
stem(conv(h,x))



Willkommen!



Faltung im Audiobereich



Multiplikation von Polynomen

$$\begin{aligned}(a_0 + a_1x + a_2x^2)(b_0 + b_1x + b_2x^2) = \\ a_0b_0 + a_1b_0x + a_2b_0x^2 + \\ + a_0b_1x + a_1b_1x^2 + a_2b_1x^3 + \\ + a_0b_2x^2 + a_1b_2x^3 + a_2b_2x^4\end{aligned}$$

A = [a0, a1, a2]

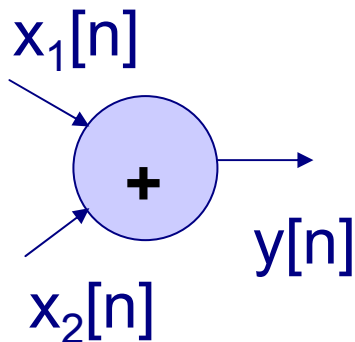
B = [b0, b1, b2]

conv(A, B)

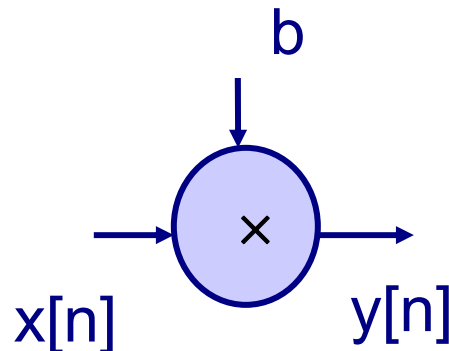
Implementierung von FIR-Filtern

$$y[n] = \sum_{k=0}^M b_k x[n-k]$$

Addition



Multiplikation



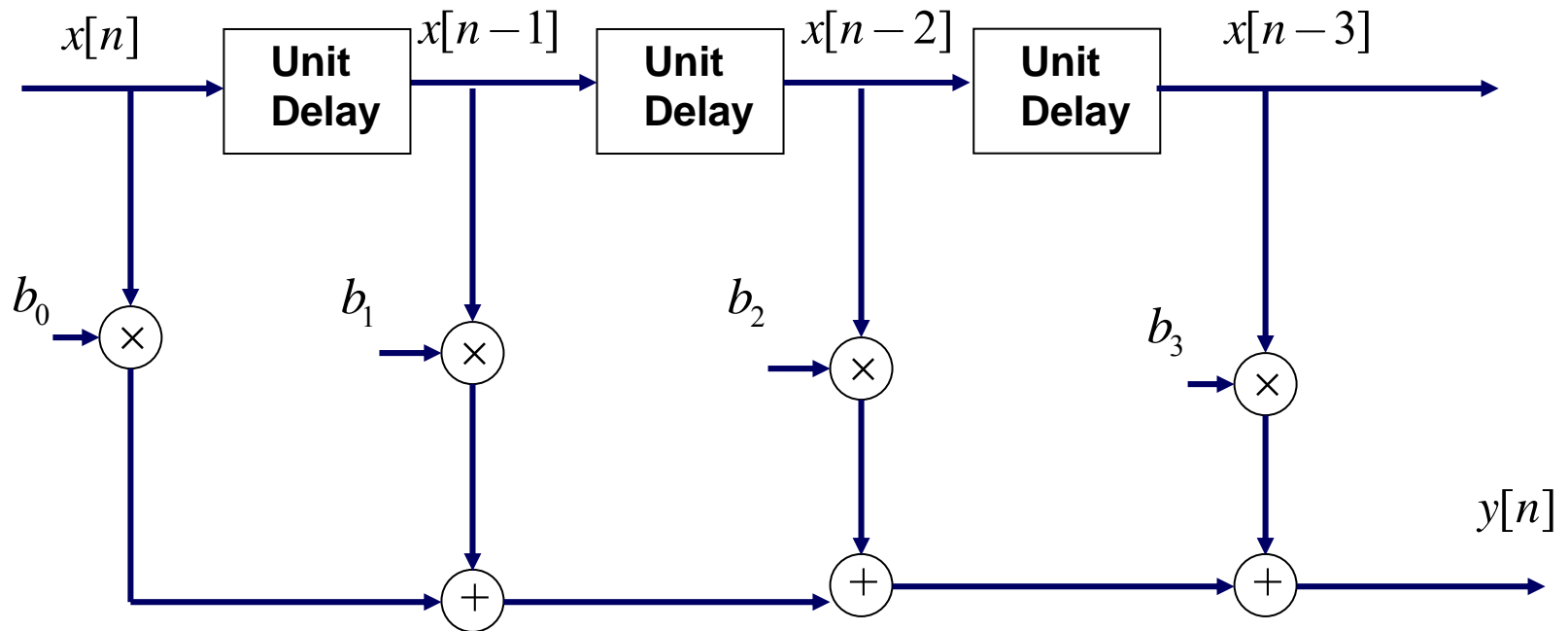
Verzögerung



Blockdiagramm (direkte Form)

$$y[n] = \sum_{k=0}^3 b_k x[n-k]$$

$$y[n] = b_0 x[n] + b_1 x[n-1] + b_2 x[n-2] + b_3 x[n-3]$$



Blockdiagram (transponierte Form)

$$y[n] = b_0x[n] + v_1[n-1]$$

$$v_1[n] = b_1x[n] + v_2[n-1]$$

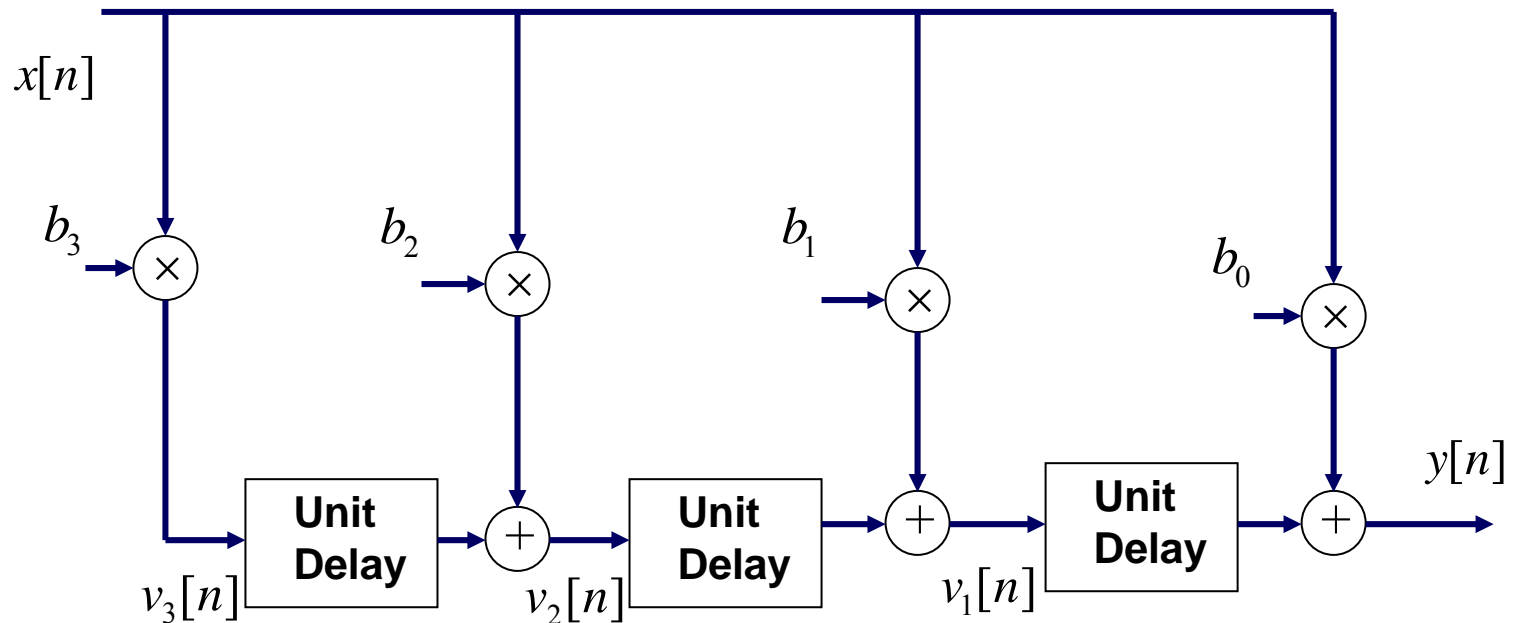
$$v_2[n] = b_2x[n] + v_3[n-1]$$

$$v_3[n] = b_3x[n]$$

$$v_2[n] = b_2x[n] + b_3x[n-1]$$

$$v_1[n] = b_1x[n] + b_2x[n-1] + b_3x[n-2]$$

$$y[n] = b_0x[n] + b_1x[n-1] + b_2x[n-2] + b_3x[n-3]$$



Faltung und LTI Systeme



$$x[n] = \sum_l x[l]\delta[n-l] \quad \text{im allgemeinsten Fall} \quad -\infty < l < \infty$$

Das Eingangssignal besteht aus einer Folge von gewichteten und zeitversetzten Einheitsimpulsen. Die Systemantwort auf die gewichteten Einheitsimpulse ist:

$$x[0]\delta[0] \quad \rightarrow \quad x[0]h[n]$$

$$x[1]\delta[n-1] \quad \rightarrow \quad x[1]h[n-1]$$

$$x[2]\delta[n-2] \quad \rightarrow \quad x[2]h[n-2]$$

$$x[l]\delta[n-l] \quad \rightarrow \quad x[l]h[n-l]$$

Faltung und LTI Systeme (2)

Durch Überlagerung aller Einheitsimpulse des Eingangssignals folgt:

$$x[n] = \sum_l x[l] \delta[n-l] \quad \rightarrow \quad y[n] = \sum_l x[l] h[n-l]$$

Da im allgemeinen weder $x[n]$ noch $h[n]$ von endlicher Länge sind, gilt (Faltungssumme):

$$y[n] = \sum_{l=-\infty}^{\infty} x[l] h[n-l]$$

Jedes LTI-System lässt sich durch die Faltungssumme beschreiben.

Eigenschaften der Faltung

$$y[n] = x[n] * h[n] = \sum_{l=-\infty}^{\infty} x[l]h[n-l]$$

* Faltungsoperator

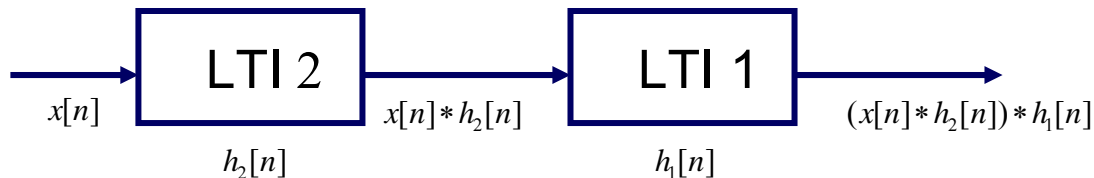
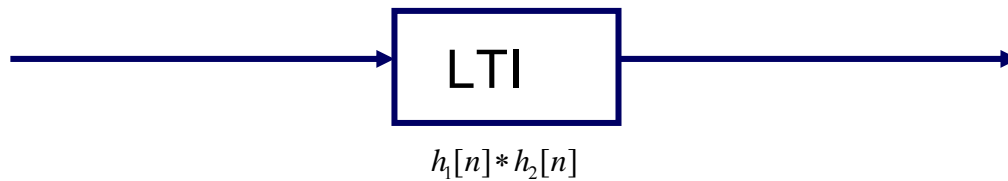
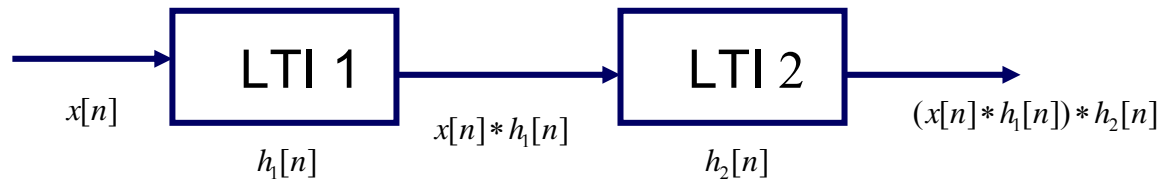
Faltung mit Impuls $x[n] * \delta[n - n_0] = x[n - n_0]$

Kommutativ: $x[n] * h[n] = h[n] * x[n]$

$$y[n] = h[n] * x[n] = \sum_{l=-\infty}^{\infty} h[l]x[n-l]$$

Assoziativ: $(x_1[n] * x_2[n]) * x_3[n] = x_1[n] * (x_2[n] * x_3[n])$

Kaskadieren von LTI Systemen



$$\begin{aligned} y[n] &= (x[n] * h_1[n]) * h_2[n] = x[n] * (h_1[n] * h_2[n]) = \\ &= x[n] * (h_2[n] * h_1[n]) = (x[n] * h_2[n]) * h_1[n] \end{aligned}$$

Frequency Response of FIR Filters (Frequenzgang)

Sinusförmige Eingangsgrößen

$$x[n] = x(nT_s) = A \cos(\omega n T_s + \varphi) = A \cos(\hat{\omega} n + \varphi)$$

$\hat{\omega}$ ist die normalisierte Frequenz! $\hat{\omega} = \omega T_s$

$\hat{\omega}$ ist eine dimensionslose Größe !

Der Index in $x[n]$ ist ebenfalls dimensionslos. Wenn ein Signal $x(t)$ abgetastet ist, geht die Zeitinformation verloren! Das zeitdiskrete Signal ist nur eine Folge von Zahlen und diese Zahlen enthalten KEINE Information über das Abtastintervall.

Für die Rekonstruktion des Zeitsignals muss die Abtastperiode bekannt sein.

$x(t) = Ae^{j\varphi} e^{j\omega t}$ Abtastung
kontinuierlich

$x[n] = Ae^{j\varphi} e^{j\hat{\omega}n}$
diskret

$$\hat{f} = \frac{\hat{\omega}}{2\pi} = fT_s = f / f_s$$

$$\begin{aligned} y[n] &= \sum_{k=0}^M b_k x[n-k] = \sum_{k=0}^M h[k] x[n-k] = \\ &= \sum_{k=0}^M b_k Ae^{j\varphi} e^{j\hat{\omega}(n-k)} = \underbrace{\sum_{k=0}^M b_k e^{-j\hat{\omega}k}}_{\mathbf{H}(\hat{\omega})} \cdot Ae^{j\varphi} e^{j\hat{\omega}n} \end{aligned}$$

Die komplexe Exponentialfunktion ist die **einzig**e Signalform, die das lineare System ohne Änderung der Kurvenform passiert.

Es ändern sich lediglich Amplitude und Phase, die Eigenschaft, sinusförmige Funktion zu sein, bleibt erhalten!

Der Ausdruck $y[n] = \mathbf{H}(\hat{\omega})x[n]$ gilt **nur** für die Eingangsfunktion $Ae^{j\varphi} e^{j\hat{\omega}n}$ und hat für keine andere Eingangsfunktion eine Bedeutung !

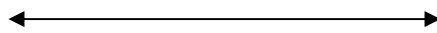
Frequency response

$$y[n] = \mathbf{H}(\hat{\omega}) A e^{j\varphi} e^{j\hat{\omega}n} \quad -\infty < n < \infty$$

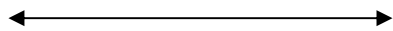
$$\mathbf{H}(\hat{\omega}) = \sum_{k=0}^M b_k e^{-j\hat{\omega}k} = \sum_{k=0}^M h[k]_k e^{-j\hat{\omega}k}$$

$\mathbf{H}(\hat{\omega})$ beschreibt die Antwort eines LTI-Systems für jedes $\hat{\omega}$.

$$\mathbf{A} \cdot e^{j\hat{\omega}n} \Rightarrow \mathbf{B} \cdot e^{j\hat{\omega}n}$$



gleiche Frequenz



andere (komplexe) Amplitude

Beispiel

$$b_k = [1 \quad 2 \quad 1]$$

$$\begin{aligned} \mathbf{H}(\hat{\omega}) &= 1 + 2e^{-j\hat{\omega}} + e^{-j\hat{\omega}2} = \\ &= e^{-j\hat{\omega}} (e^{j\hat{\omega}} + 2 + e^{-j\hat{\omega}}) = \\ &= e^{-j\hat{\omega}} (2 + 2 \cos \hat{\omega}) \end{aligned}$$

$$|\mathbf{H}(\hat{\omega})|$$

$$\phi(\hat{\omega}) = -\hat{\omega}$$

Frequency response (2)

$\mathbf{H}(\hat{\omega})$... komplexe Funktion

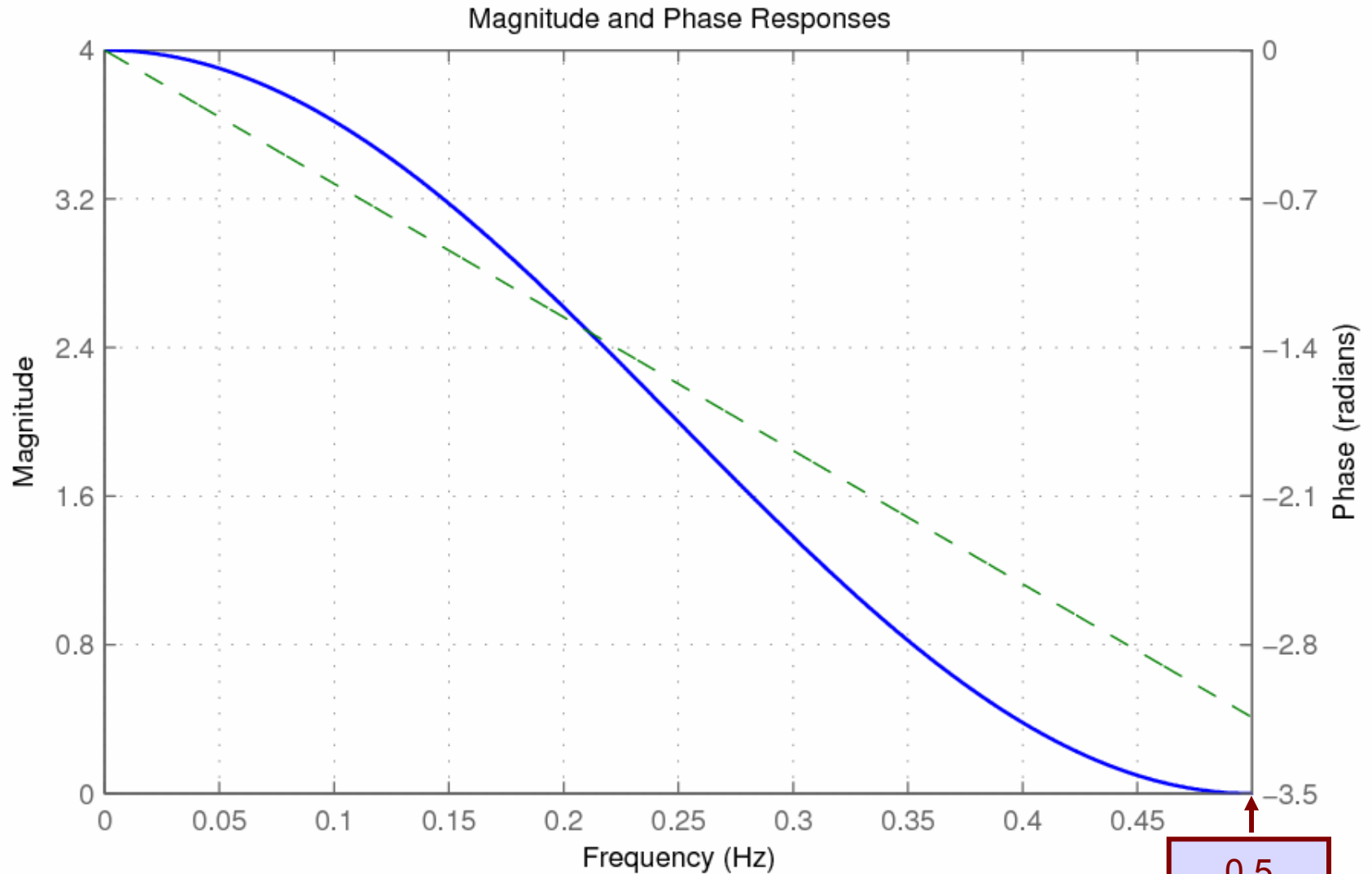
$$\mathbf{H}(\hat{\omega}) = \Re e \{ \mathbf{H}(\hat{\omega}) \} + j \Im m \{ \mathbf{H}(\hat{\omega}) \} =$$

$$= \underbrace{|\mathbf{H}(\hat{\omega})|}_{\text{Magnitude, Betrag}} \cdot e^{j \underbrace{\angle \mathbf{H}(\hat{\omega})}_{\text{Phase}}}$$

Magnitude, Betrag
Gain, Verstärkung

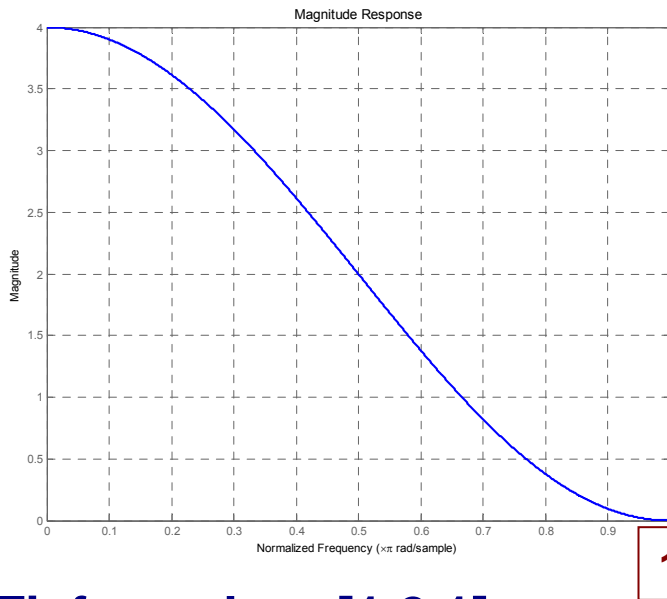
Phase

Bode Diagram

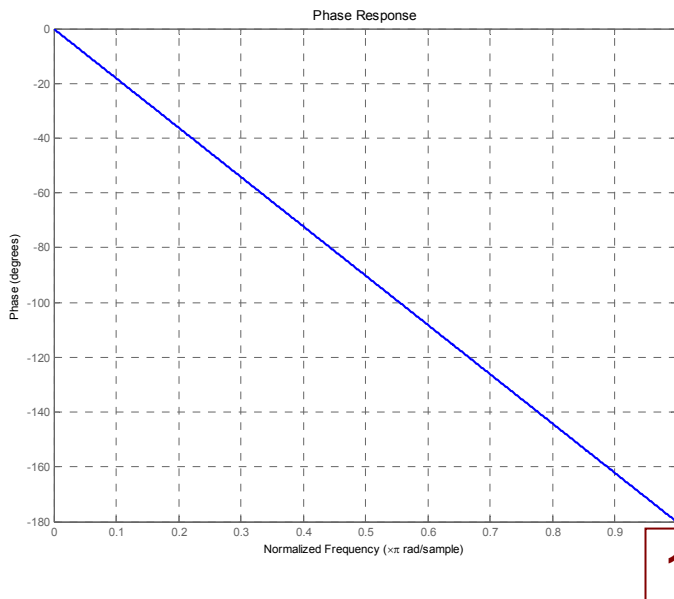


DSP_6-FIR

0.5
 $\frac{1}{2} f_{\text{abstast}}$
 π

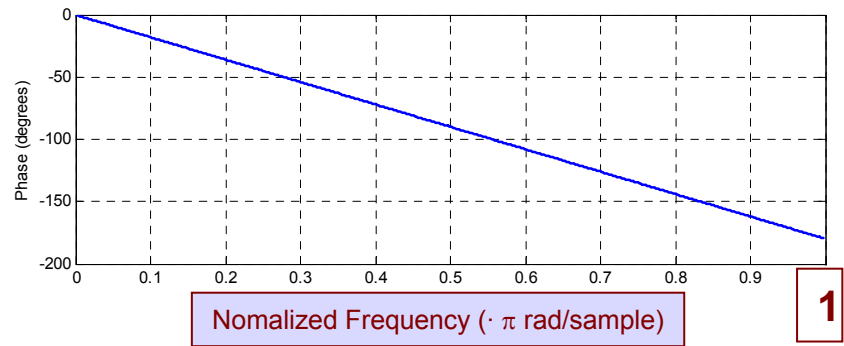
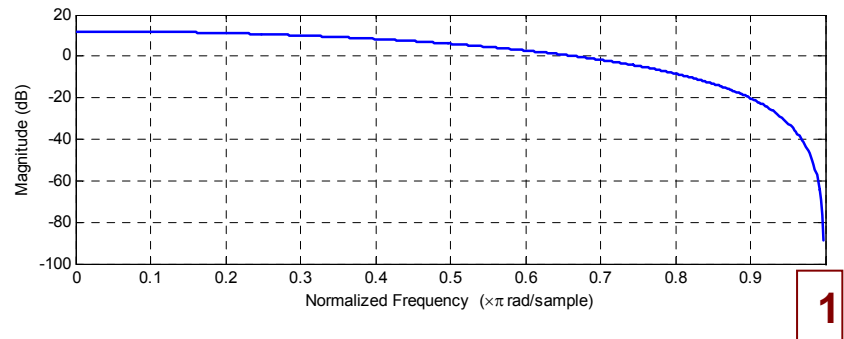


Tiefpass $b_k = [1 \ 2 \ 1]$



```
▼ fvtool([1 2 1],1)
```

Betrag in logarithmischer Darstellung



```
◀ freqz([1 2 1],1)
```

Logarithmische Darstellung

Bei Filtern interessiert das Verhältnis von Ausgangsleistung zu Eingangsleistung. Da dieses Leistungsverhältnis in der Regel mehrere Zehnerpotenzen überstreicht verwendet man eine logarithmische Darstellung. Das Leistungsverhältnis wird in **Bel** angegeben.

$$\log\left(\frac{P_{out}}{P_{in}}\right) = a \text{ [Bel]}$$

Häufig will man aber auch (Spannungs-) Amplituden vergleichen:

$$\log\left(\frac{U_{out}^2}{U_{in}^2}\right) = 2 \log\left(\frac{U_{out}}{U_{in}}\right) \text{ [Bel]} = 20 \log\left(\frac{U_{out}}{U_{in}}\right) \text{ [dB]}$$

20 dB	10
3 dB	$\sqrt{2}$
0 dB	1
-3 dB	$1/\sqrt{2}$
-20 dB	1/10
-40 dB	1/100
-60 dB	1/1000

Sinusschwingungen sind ein gutes Werkzeug zur praktischen Überprüfung der Linearität eines Systems, indem man an den Eingang ein Sinussignal anlegt und den Ausgang mit einem Oszilloskop beobachtet.

- Ausgangssignal sinusförmig?
- Eingangssignal \uparrow : Ausgangssignal bleibt sinusförmig?
- $f_{\text{Eingang}} \uparrow \downarrow$: Amplitude $\uparrow \downarrow 0$, Phase \leftrightarrow ,
Kurvenform bleibt sinusförmig?

Messtechnische Untersuchung. Kein strenger Beweis für Linearität im untersuchten Bereich für praktische Zwecke gut geeignet.

Beispiel FIR Filter

$$b_k = [1, -2, 4, -2, 1]$$

$$H(\hat{\omega}) = 1 - 2e^{-j\hat{\omega}} + 4e^{-j2\hat{\omega}} - 2e^{-j3\hat{\omega}} + e^{-j4\hat{\omega}}$$

durch Herausheben von $e^{-j2\hat{\omega}}$ bekommen wir

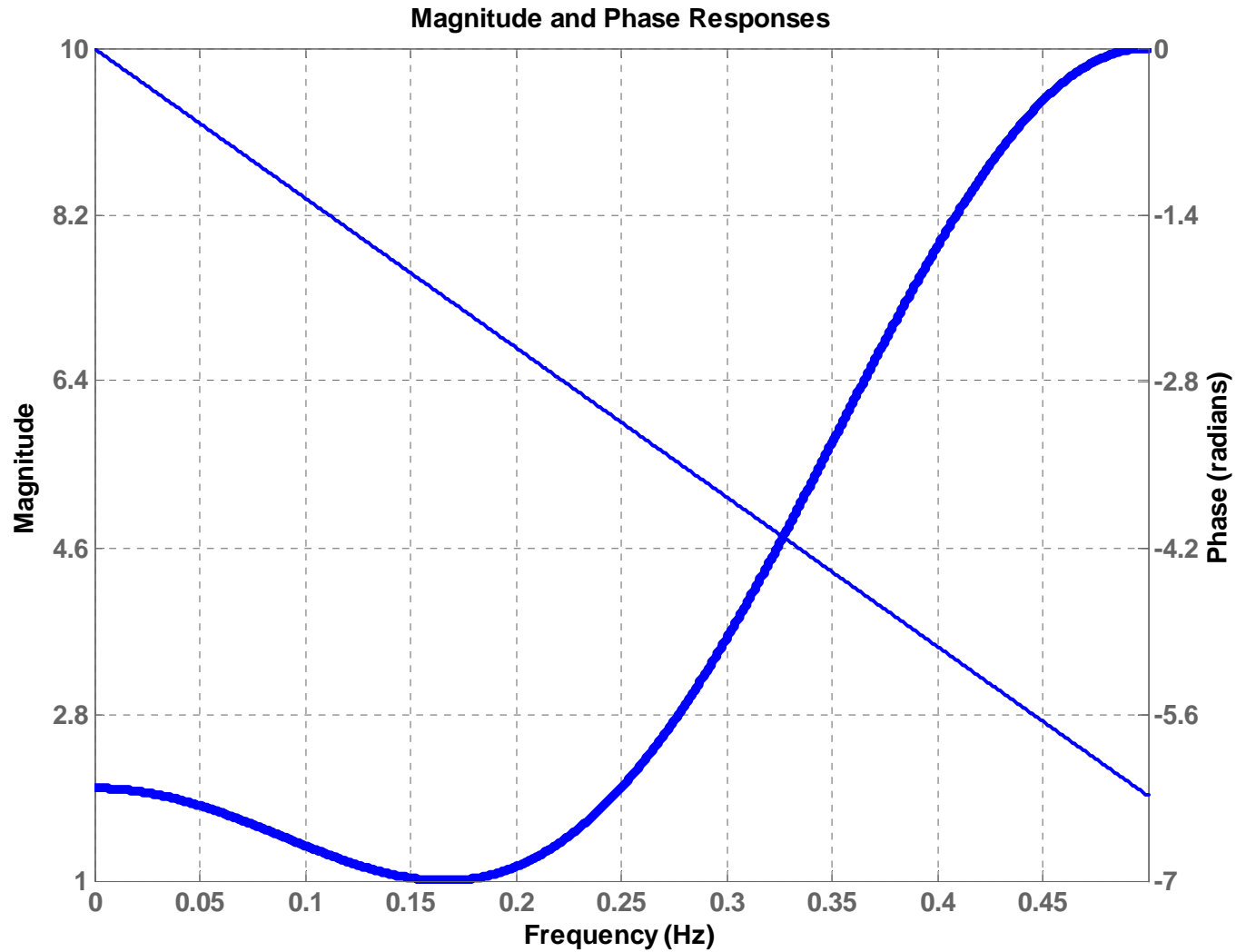
$$H(\hat{\omega}) = e^{-j2\hat{\omega}} \left(e^{j2\hat{\omega}} - 2e^{j\hat{\omega}} + 4 - 2e^{-j\hat{\omega}} + e^{-j2\hat{\omega}} \right)$$

$$e^{j2\hat{\omega}} + e^{-j2\hat{\omega}} = 2\cos 2\hat{\omega} \quad 2e^{j\hat{\omega}} + 2e^{-j\hat{\omega}} = 4\cos \hat{\omega}$$

$$H(\hat{\omega}) = e^{-j2\hat{\omega}} \left(2\cos 2\hat{\omega} - 4\cos \hat{\omega} + 4 \right)$$

$$|H(\hat{\omega})| = 4 - 4\cos \hat{\omega} + 2\cos 2\hat{\omega} \quad \phi(\hat{\omega}) = -2\hat{\omega}$$

$$b_k = [1 \ -2 \ 4 \ -2 \ 1]$$



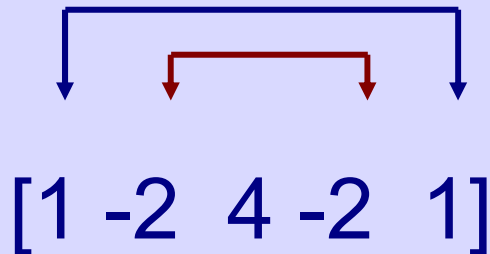
Bei den Beispielen $[1 \ 2 \ 1]$ und $[1 \ -2 \ 4 \ -2 \ 1]$

ist die Phase $\phi(\hat{\omega}) = -\hat{\omega}$ $\phi(\hat{\omega}) = -2\hat{\omega}$

eine lineare Funktion von $\hat{\omega}$

Eine lineare Phase ist immer dann gegeben, wenn für die Filterkoeffizienten

gilt: $b_k = b_{M-k}$ für $k = 0, 1, \dots, M$

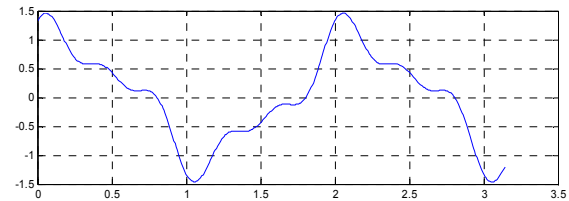
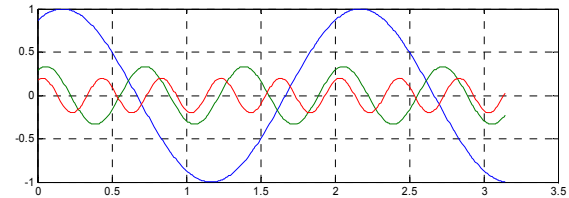
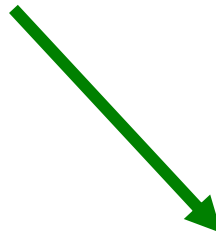
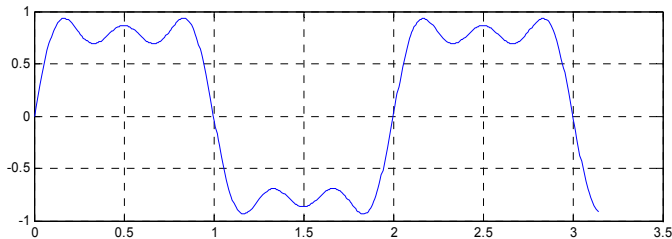
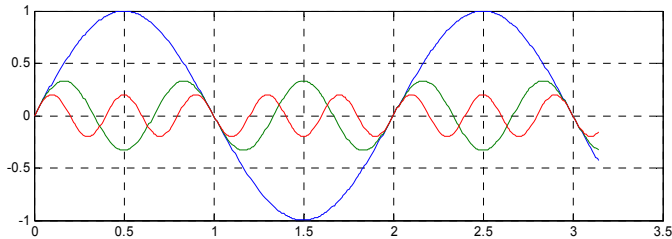


Wenn z_0 eine Nullstelle von $H(z)$ ist, dann sind

$$z_0, \quad z_0^*, \quad \frac{1}{z_0}, \quad \frac{1}{z_0^*}$$

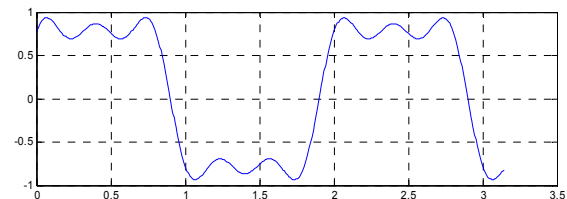
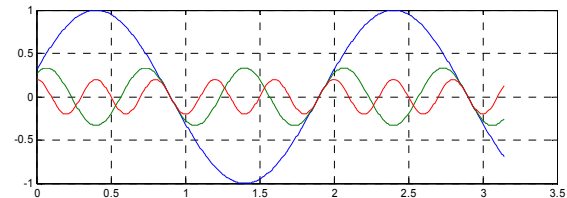
ebenfalls Nullstellen von $H(z)$.

Bedeutung der linearen Phase



Phasenverschiebung konstant

$$\varphi_1 = \varphi_2 = \varphi_3 = 60^\circ$$

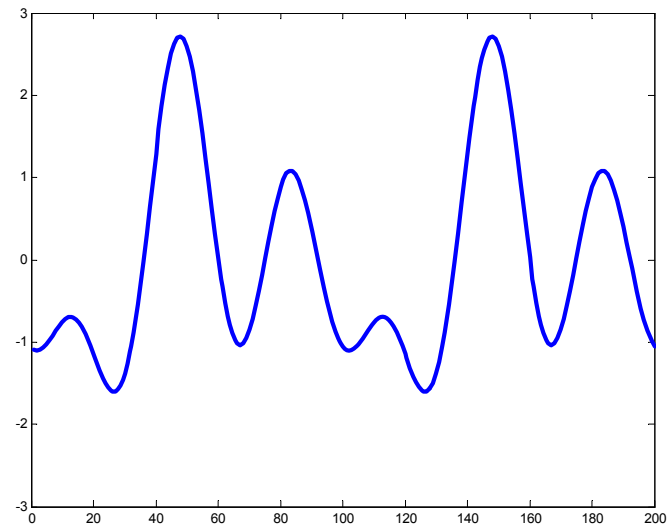
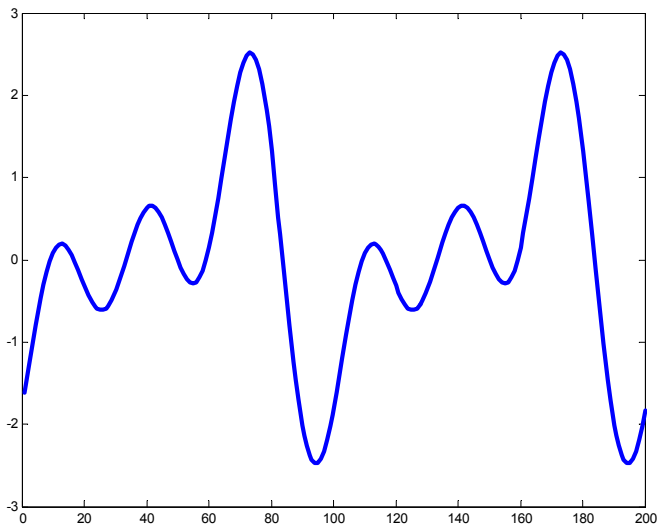
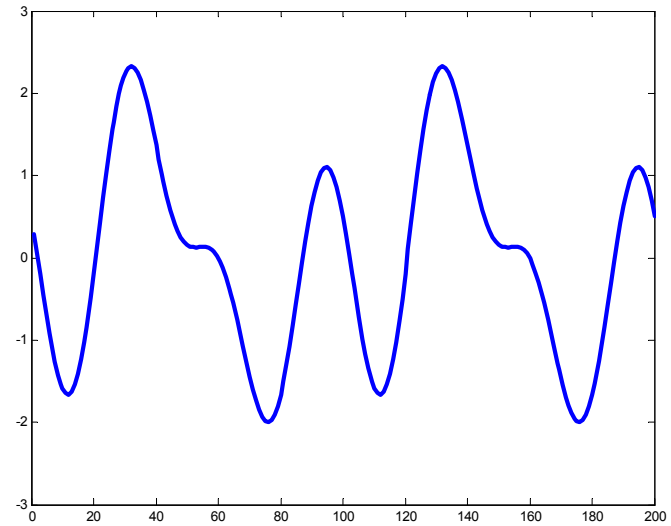
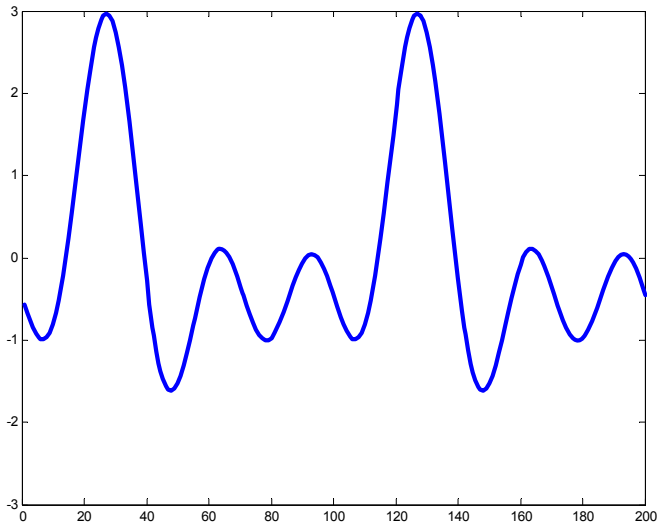


**Die lineare Phase
erhält die Kurvenform!**

Phase linear (frequenzproportional)

$$\varphi_1 = 30^\circ \quad \varphi_2 = 60^\circ \quad \varphi_3 = 90^\circ$$

Töne sind phasenunabhängig: Klingt alles gleich!



Superposition (Überlagerung)

$$\begin{aligned}x[n] &= X_0 + \sum_{k=1}^N \left(\frac{X_k}{2} e^{j\hat{\omega}_k n} + \frac{X_k^*}{2} e^{-j\hat{\omega}_k n} \right) = \\ &= X_0 + \sum_{k=1}^N |X_k| \cos(\hat{\omega}_k n + \angle X_k)\end{aligned}$$

$\mathbf{H}(-\hat{\omega}) = \mathbf{H}^*(\hat{\omega})$... gültig für reelle Koeffizienten

$$\begin{aligned}y[n] &= \mathbf{H}(0) X_0 + \sum_{k=1}^N \left(\mathbf{H}(\hat{\omega}_k) \frac{X_k}{2} e^{j\hat{\omega}_k n} + \mathbf{H}(-\hat{\omega}_k) \frac{X_k^*}{2} e^{-j\hat{\omega}_k n} \right) = \\ &= \mathbf{H}(0) X_0 + \sum_{k=1}^N |\mathbf{H}(\hat{\omega}_k)| |X_k| \cos(\hat{\omega}_k n + \angle X_k + \angle \mathbf{H}(\hat{\omega}_k))\end{aligned}$$

Beispiel

$$b_k = [1, 2, 1]$$

$$x[n] = 4 + 3 \cos\left(\frac{\pi}{4}n - \frac{\pi}{2}\right) + 2 \cos\left(\frac{9\pi}{10}n\right)$$

$$\mathbf{H}(0) = 4$$

$$\mathbf{H}\left(\frac{\pi}{4}\right) = 3.414 e^{-j\frac{\pi}{4}}$$

$$\mathbf{H}\left(\frac{9\pi}{10}\right) = 0.097 e^{-j\frac{9\pi}{10}}$$

$$y[n] = 4 \times 4 + 3.414 \times 3 \cos\left(\frac{\pi}{3}n - \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right) + 0.097 \times 3 \cos\left(\frac{20\pi}{21}n - \frac{9\pi}{10}\right)$$

Berechnung mit Matlab

```
[H,w] = freqz(B,A,w)
```

```
[H,w] = freqz(
```

```
[1 2 1],1,
```

```
[0,(pi/4),(pi*9/10)])
```

→ [4, (2.4142-2.4142i), (-0.0931-0.0302i)]

abs(H) und angle(H)

→ [4e^{j0}, 3.41420e^{-j0.7854}, 0.0979e^{-j2.8274}]

→ [4, 3.41420e^{-jπ/4}, 0.0979e^{-j9π/10}]

Frequency Domain

Spektrum des Signals wird vom System modifiziert durch $H(\hat{\omega})$.

Die einzelnen Abtastwerte werden **NICHT** betrachtet.

Eigenschaften der Frequenzantwort

$$h[n] = \sum_{k=0}^M h[k] \delta[n-k] \quad \mathbf{H}(\hat{\omega}) = \sum_{k=0}^M h[k] e^{-j\hat{\omega}k}$$

$$\mathbf{H}(\hat{\omega} + 2\pi) = \sum_{k=0}^M b_k e^{-j\hat{\omega}k} \cdot e^{-j2\pi k} = \mathbf{H}(\hat{\omega}) \quad \text{Spektrum periodisch}$$
$$= 1$$

$$\mathbf{H}(-\hat{\omega}) = \mathbf{H}^*(\hat{\omega}) \quad \text{wenn } b_k = \text{reell}$$

$$|\mathbf{H}(-\hat{\omega})| = |\mathbf{H}(\hat{\omega})| \quad \text{Betrag ... gerade}$$

$$\phi(-\hat{\omega}) = \angle \mathbf{H}(-\hat{\omega}) = -\phi(\hat{\omega}) = -\angle \mathbf{H}(\hat{\omega}) \quad \text{Phase ... ungerade}$$

$$\Re \{ \mathbf{H}(-\hat{\omega}) \} = \Re \{ \mathbf{H}(\hat{\omega}) \} \quad \dots \text{ gerade}$$

$$\Im \{ \mathbf{H}(-\hat{\omega}) \} = -\Im \{ \mathbf{H}(\hat{\omega}) \} \quad \dots \text{ ungerade}$$

Frequenzantwort nur $0 \leq \hat{\omega} \leq \pi$... Symmetrie

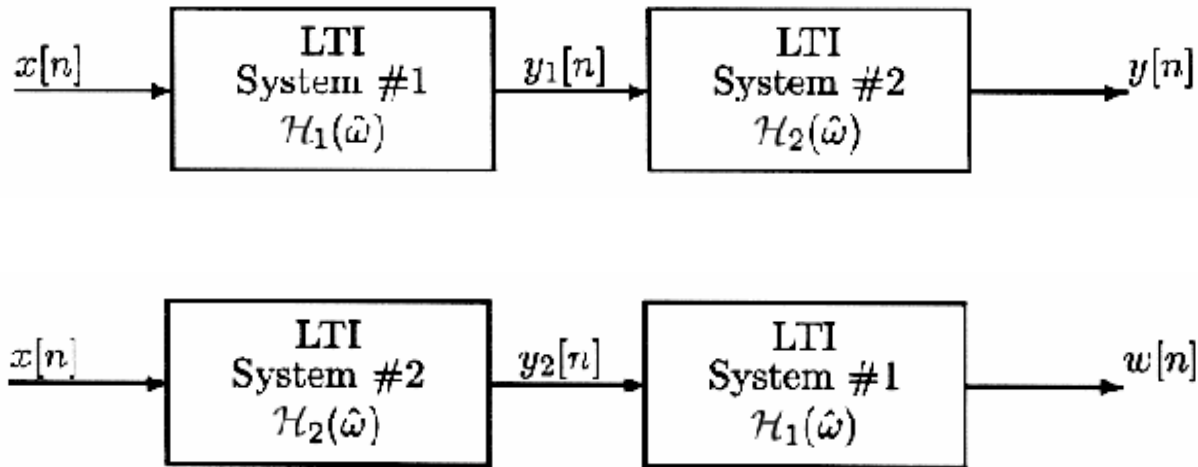
FREQZ Digital filter frequency response.
H = FREQZ(B,A,W) returns the frequency response at frequencies designated in vector W, in radians/sample (normally between 0 and pi) of the filter:

$$H(\hat{\omega}) = \frac{b_0 + b_1 e^{-j\hat{\omega}} + \dots + b_m e^{-j\hat{\omega}m}}{a_0 + a_1 e^{-j\hat{\omega}} + \dots + a_n e^{-j\hat{\omega}n}}$$

Numerator and denominator coefficients given in vectors B and A.

Für FIR-Filter ist A = [1]

Kaskadierte LTI Systeme



$$\mathbf{H}(\hat{\omega}) = \mathbf{H}_1(\hat{\omega})\mathbf{H}_2(\hat{\omega}) = \mathbf{H}_2(\hat{\omega})\mathbf{H}_1(\hat{\omega})$$

$$h_1[n] * h_2[n] \Leftrightarrow \mathbf{H}_1(\hat{\omega})\mathbf{H}_2(\hat{\omega})$$

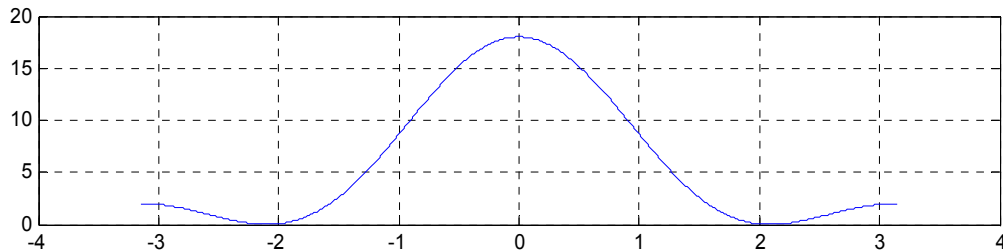
Faltung im Zeitbereich \Leftrightarrow Multiplikation im Frequenzbereich

Cascaded systems

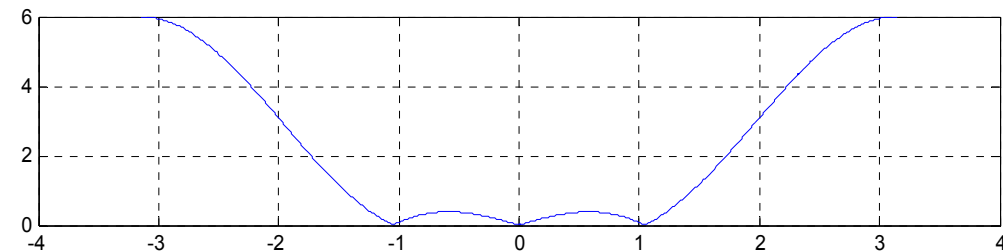
$$\mathbf{H}_1(\hat{\omega}) = 2 + 4e^{-j\hat{\omega}} + 6e^{-j\hat{\omega}^2} + 4e^{-j\hat{\omega}^3} + 2e^{-j\hat{\omega}^4}$$

$$\mathbf{H}_2(\hat{\omega}) = 1 - 2e^{-j\hat{\omega}} + 2e^{-j\hat{\omega}^2} - e^{-j\hat{\omega}^3}$$

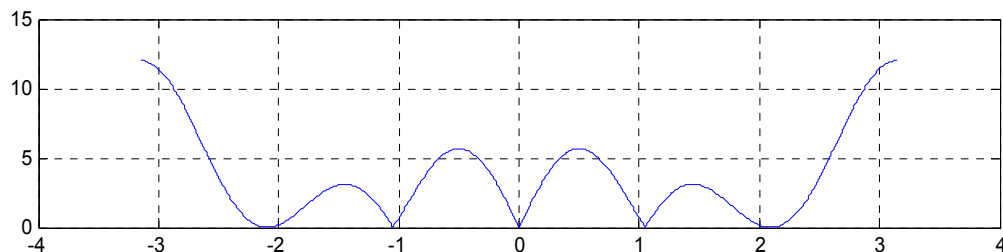
$$\mathbf{H}(\hat{\omega}) = \mathbf{H}_1(\hat{\omega})\mathbf{H}_2(\hat{\omega})$$



H_1



H_2



H_3

```
w=-pi:(pi/500):pi;  
b1=[2 4 6 4 2];  
b2=[1 -2 2 -1];  
b=conv(b1, b2);  
H1=freqz(b1,1,w);  
H2=freqz(b2,1,w);  
H=freqz(b,1,w);
```

First Difference System $b_k = [1 \ -1]$

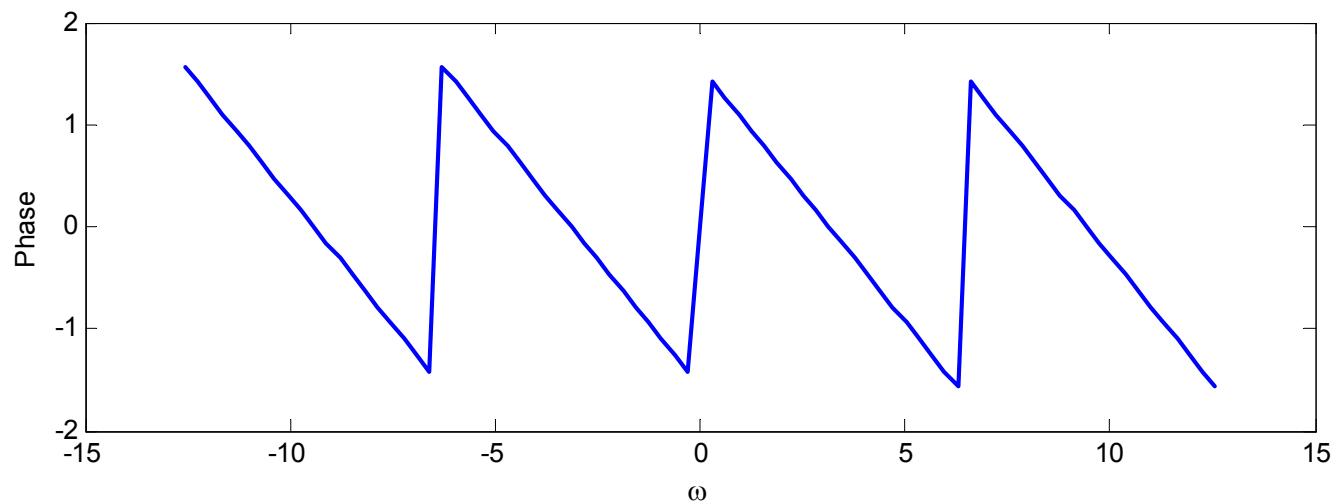
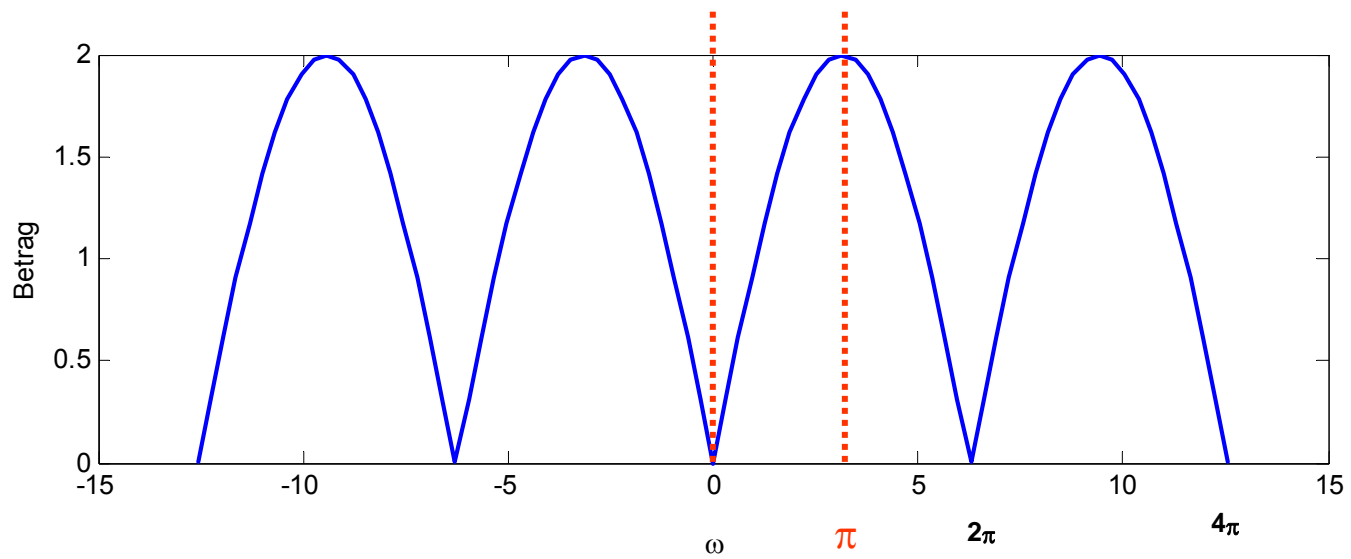
$$y[n] = x[n] - x[n-1]$$

$$\mathbf{H}[\hat{\omega}] = 1 - e^{-j\hat{\omega}} = 1 - \cos \hat{\omega} + j \sin \hat{\omega}$$

$$|\mathbf{H}[\hat{\omega}]| = 2|\sin(\hat{\omega} / 2)|$$

$$\angle \mathbf{H}[\hat{\omega}] = \arctan \frac{\sin \hat{\omega}}{1 - \cos \hat{\omega}}$$

Hochpass $b_k = [1 \ -1]$



Running-Average Filter

$$y[n] = \frac{1}{L} \sum_{k=0}^{L-1} x[n-k] \quad \text{L-point running averager}$$

$$\mathbf{H}(\omega) = \frac{1}{L} \sum_{k=0}^{L-1} e^{-j\hat{\omega}k}$$

Unter Verwendung von $\sum_{k=0}^{L-1} \alpha^k = \frac{1-\alpha^L}{1-\alpha}$

$$\begin{aligned} \mathbf{H}(\omega) &= \frac{1}{L} \sum_{k=0}^{L-1} e^{-j\hat{\omega}k} = \frac{1}{L} \left(\frac{1 - e^{-j\hat{\omega}L}}{1 - e^{-j\hat{\omega}}} \right) = \frac{1}{L} \left(\frac{e^{-j\hat{\omega}L/2} \left(e^{j\hat{\omega}L/2} - e^{-j\hat{\omega}L/2} \right)}{e^{-j\hat{\omega}/2} \left(e^{j\hat{\omega}/2} - e^{-j\hat{\omega}/2} \right)} \right) = \\ &= \left(\frac{\sin(\hat{\omega}L/2)}{L \sin(\hat{\omega}/2)} \right) e^{-j\hat{\omega}(L-1)/2} \end{aligned}$$

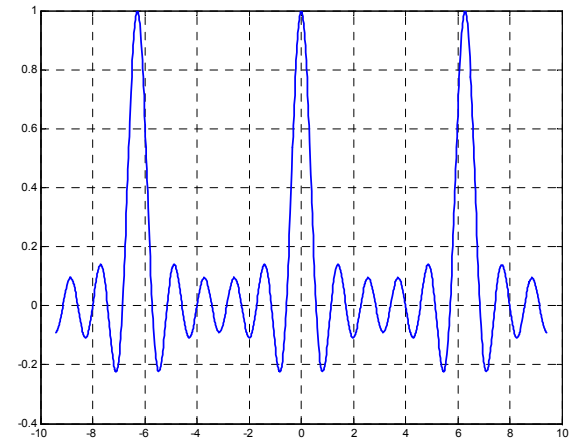
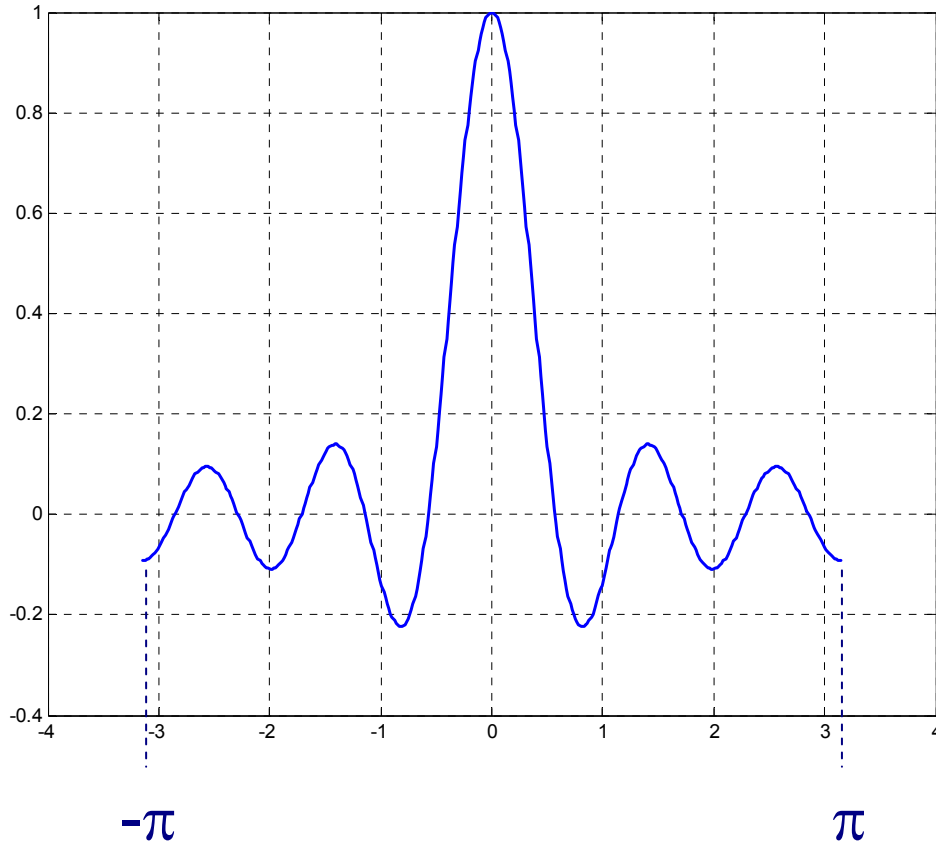
$$\mathbf{H}(\hat{\omega}) = D_L(\hat{\omega})e^{-j\hat{\omega}(L-1)/2}$$

$$\mathbf{D}_L(\hat{\omega}) = \frac{\sin(\hat{\omega}L/2)}{L\sin(\hat{\omega}/2)}$$

Die Funktion $\mathbf{D}_L(\hat{\omega})$ nennt man Diriclet -
oder periodische sinc - Funktion.

In Matlab kann sie mit

diric berechnet werden.

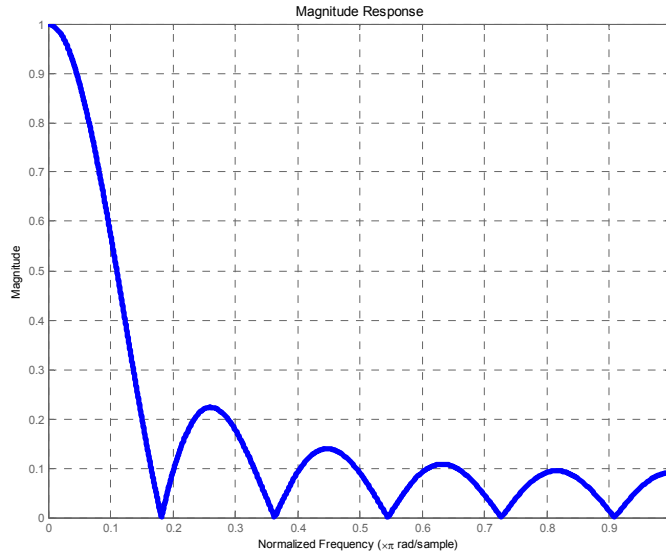


**Periodische
sinc-Funktion
von -3π bis 3π**

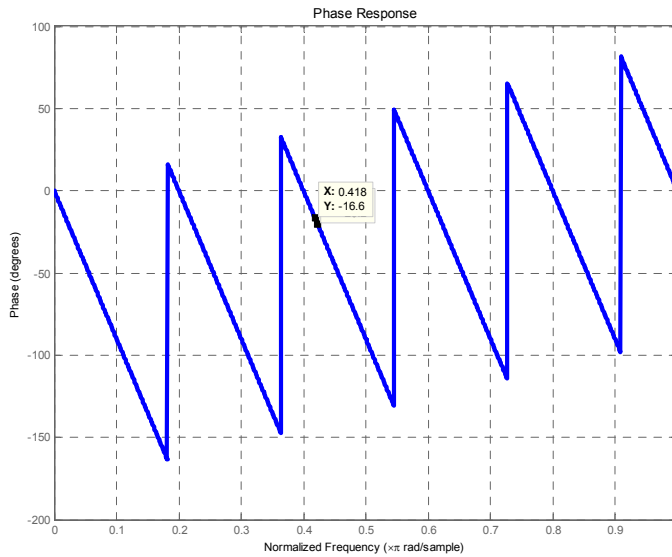
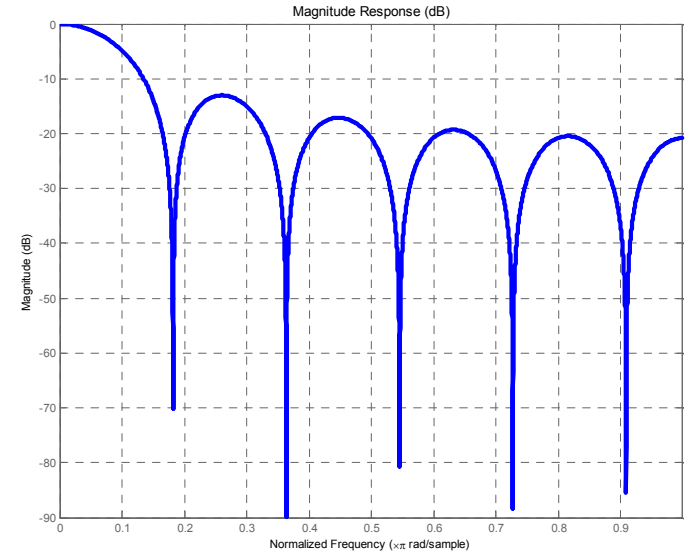
```
x=-pi:(pi/200):pi;  
plot (x,diric(x,11));
```


Running Avg.-Filter $b_k = \text{ones}(1, 11)/11$

Amplitude linear

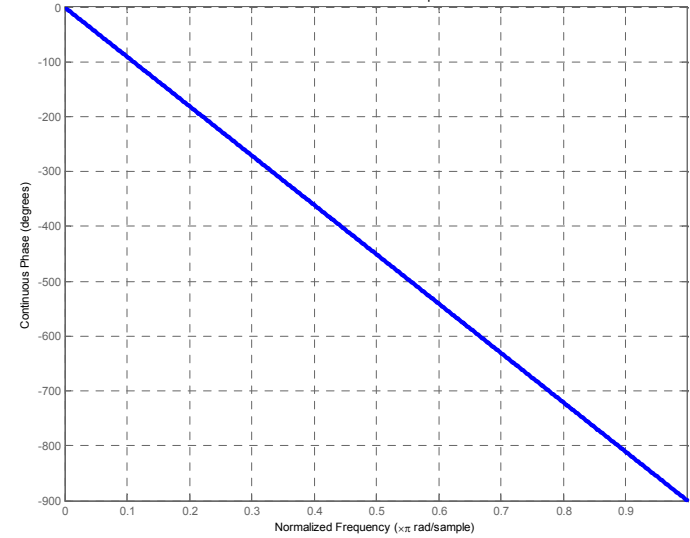


Amplitude in dB



Phase $\pm 180^\circ$

Continuous Phase Response



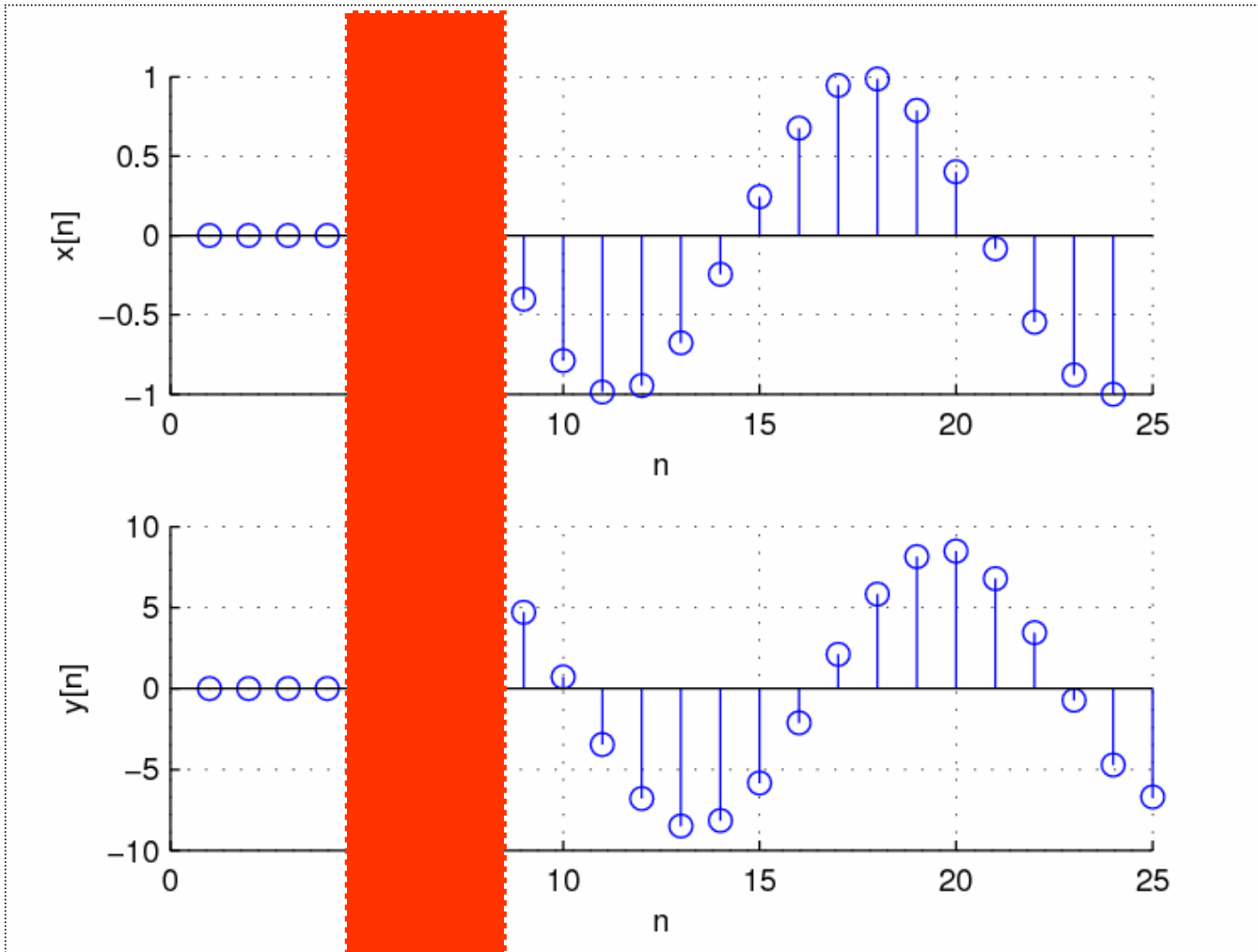
Phase kontinuierlich

Einschaltvorgänge (1)

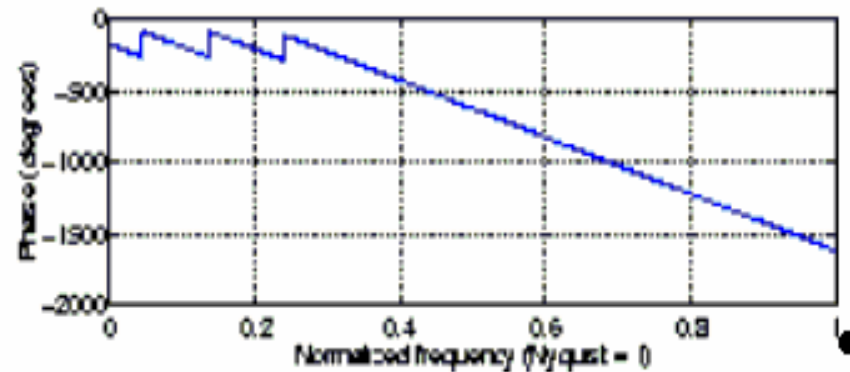
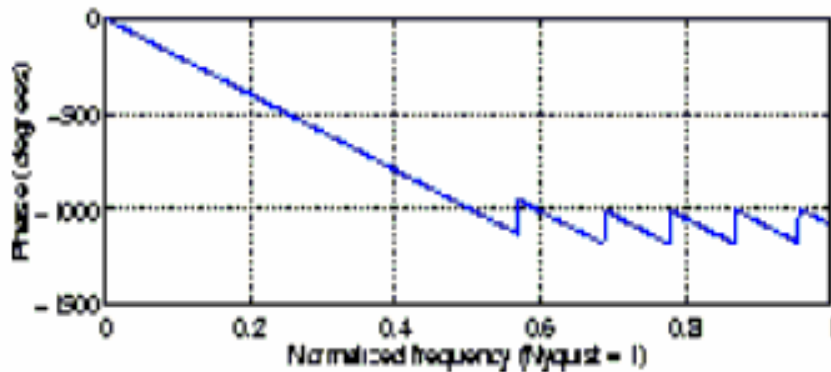
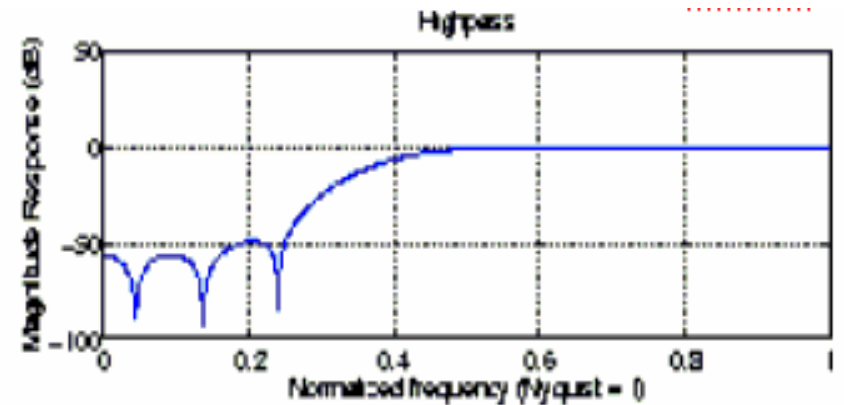
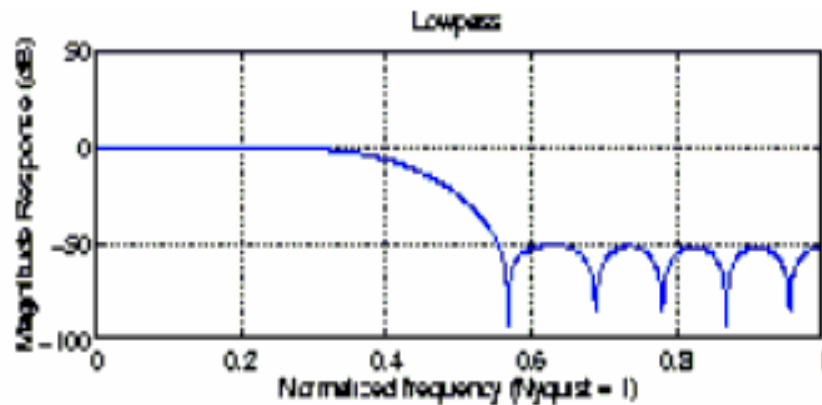
- Die Untersuchung im Frequenzbereich gilt nur für sinusoidale Funktionen, d.h. die Eingangsgröße erstreckt sich von $-\infty$ bis ∞ .
- Tatsächliche Signale werden aber „eingeschaltet“. Am Ausgang eines FIR-Filters stellt sich der eingeschwungene Zustand erst dann ein, wenn alle Unit-Delay-Elemente „gefüllt“ sind.
- Bis dieser Zustand erreicht ist, muss die Berechnung des Systemverhaltens im Zeitbereich erfolgen!

Einschaltvorgänge (2)

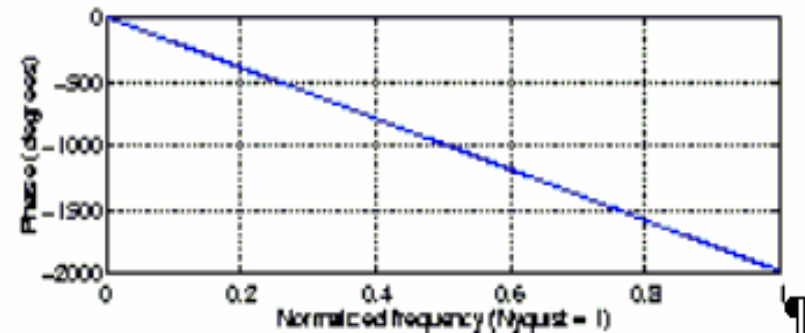
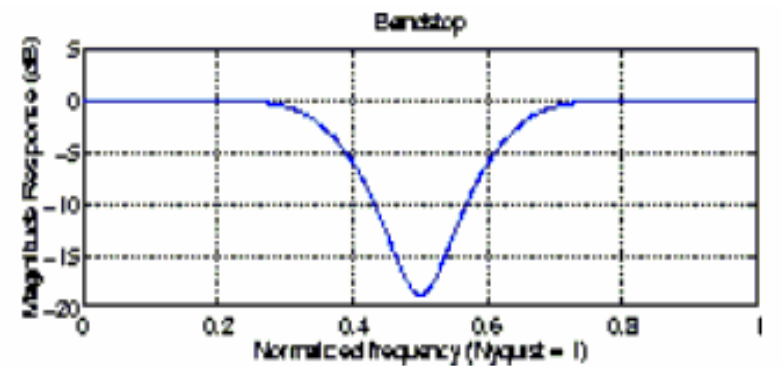
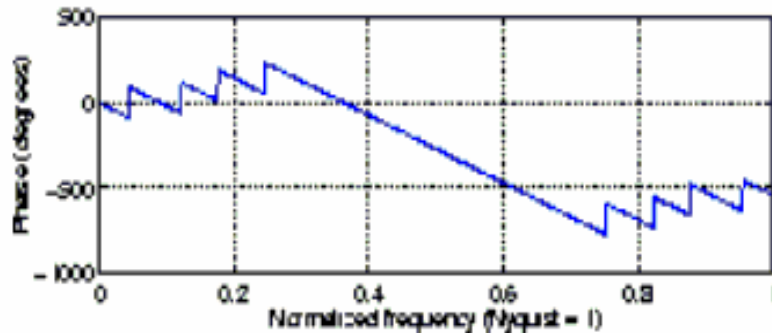
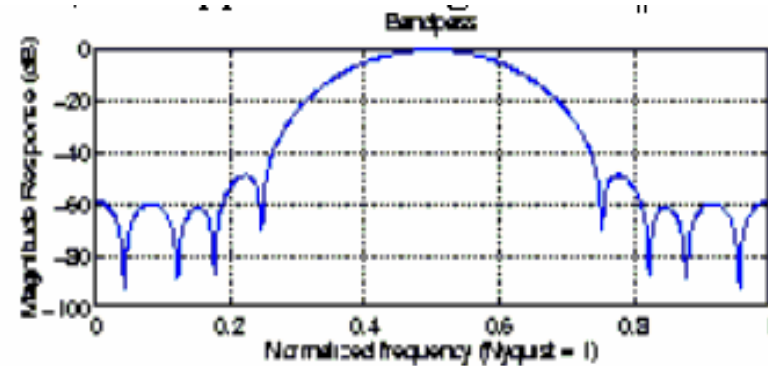
$$b_k = [1, 2, 4, 2, 1]$$



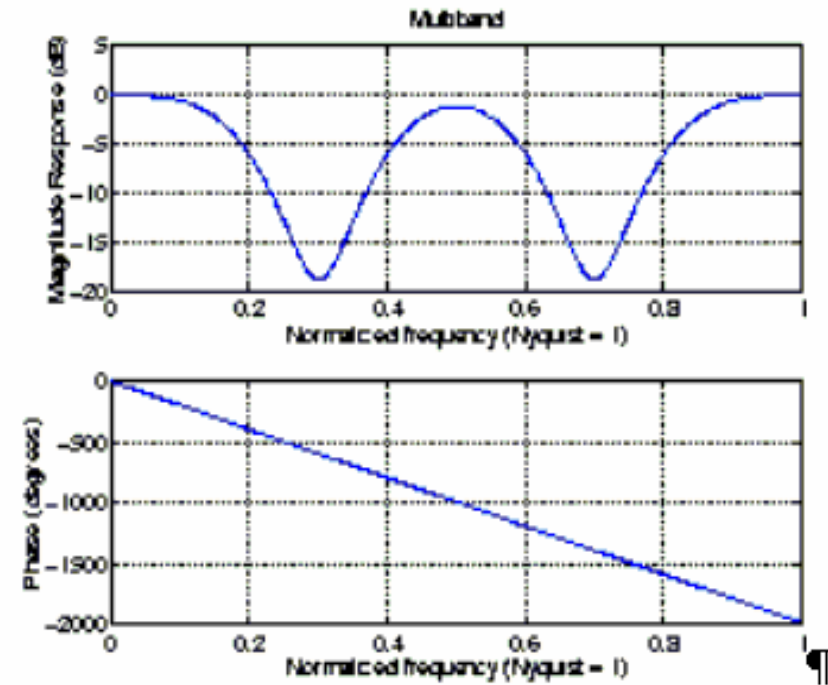
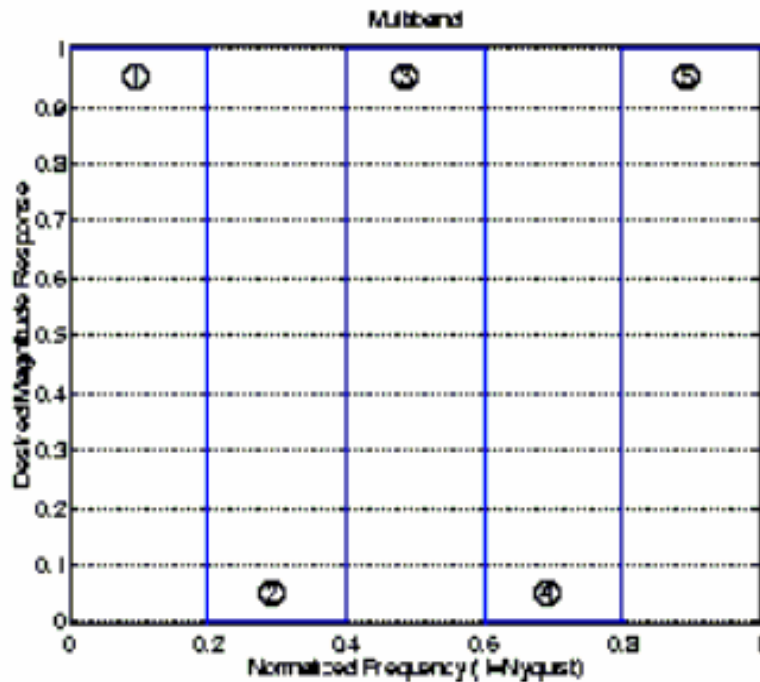
Tiefpass - Hochpass



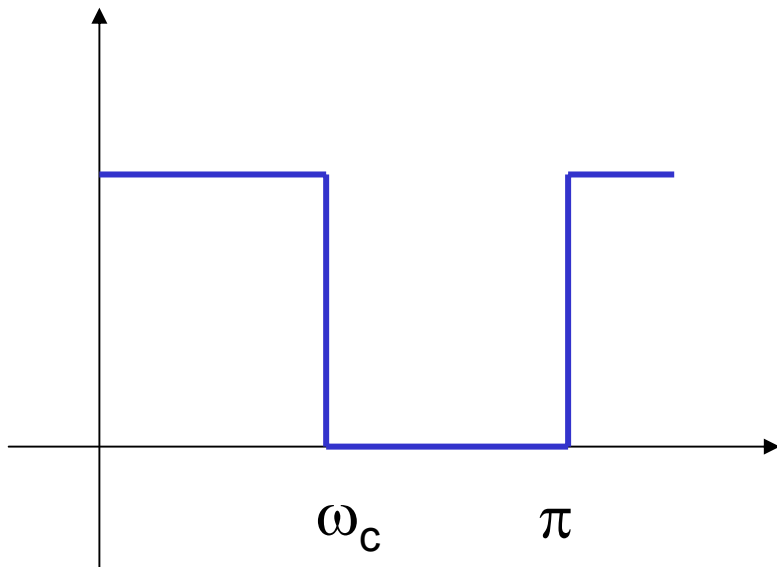
Bandpass - Bandsperre



Mehrband



Vom idealen zum realen Filter

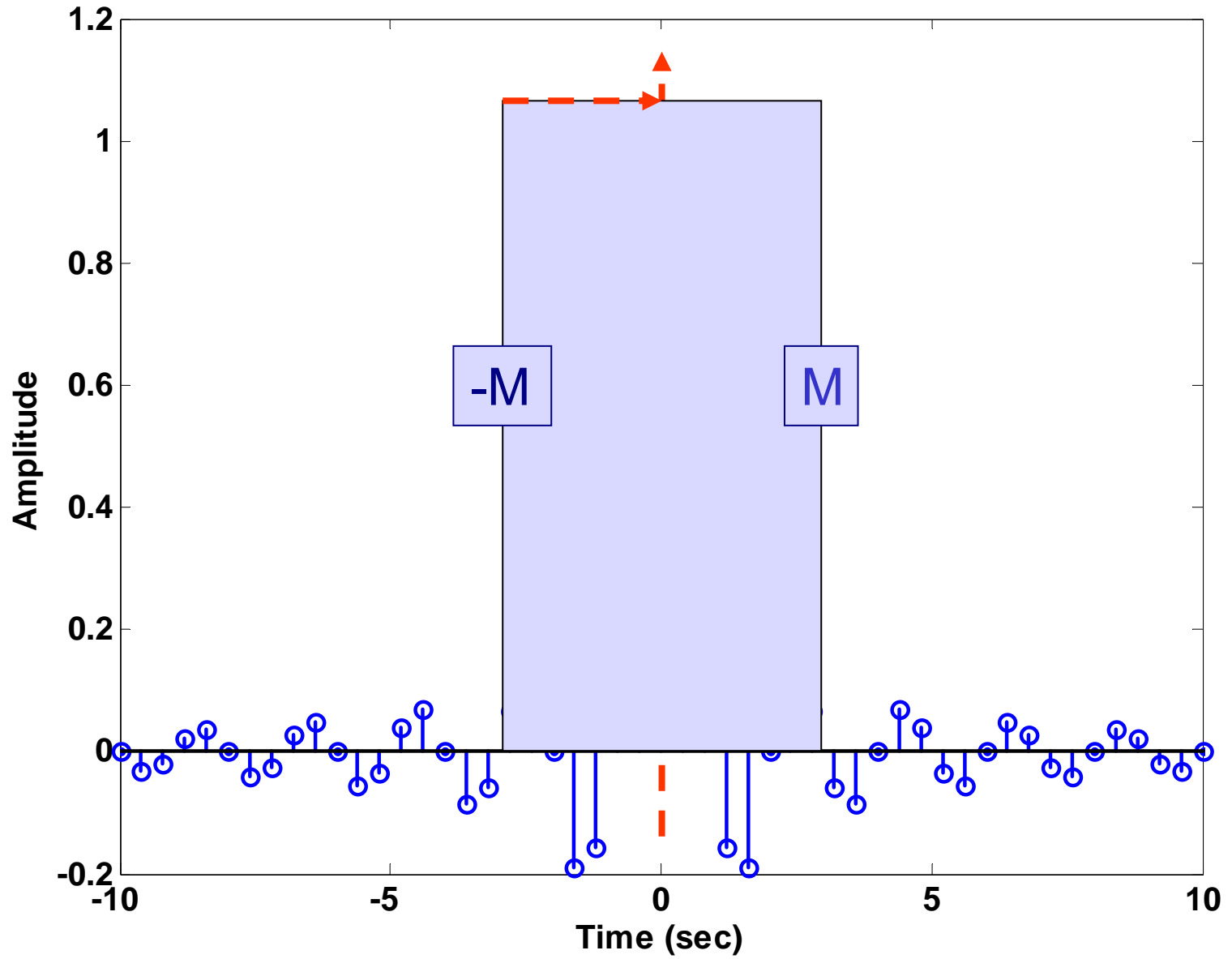


$$H_{iTP}(\hat{\omega}) = \begin{cases} 1 & |\hat{\omega}| \leq \omega_c \\ 0 & \omega_c < \hat{\omega} \leq \pi \end{cases}$$

Impulsantwort **nichtkausal!**

$$h_{iTP} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} H_{iTP}(\hat{\omega}) e^{j\hat{\omega}n} d\hat{\omega} = \frac{1}{2\pi} \left(\frac{e^{j\omega_c n}}{jn} - \frac{e^{-j\omega_c n}}{jn} \right) = \frac{\sin \omega_c n}{\pi n}, \quad -\infty < n < \infty$$

Sinc Function



**Abschneiden bei $-M$ und M ,
verschieben um M nach rechts.**

$$h_{TP} = \begin{cases} \frac{\sin[\omega_c(n-M)]}{\pi(n-M)} & 0 \leq n \leq N-1, \quad N = 2M+1 \\ 0 & \text{außerhalb} \end{cases}$$

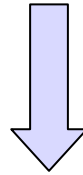
Frequenzgang zu h_{TP} berechnen!

$$h_{TP} = \begin{cases} \frac{\sin[\omega_c(n-M)]}{\pi(n-M)} & 0 \leq n \leq N-1, \quad N = 2M+1 \\ 0 & \text{außerhalb} \end{cases}$$

Multiplikation mit Rechteckfenster

$$h_{TP} = h_{iTP} \times w_R$$

$$h_{TP} = h_{iTP} \times w_R$$



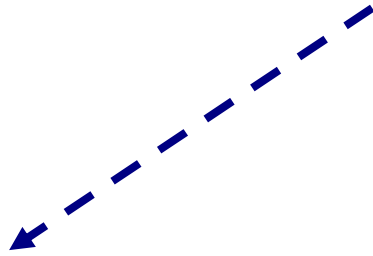
Frequenzbereich

$h_{iTP} \Rightarrow$ **Ideales Filter**

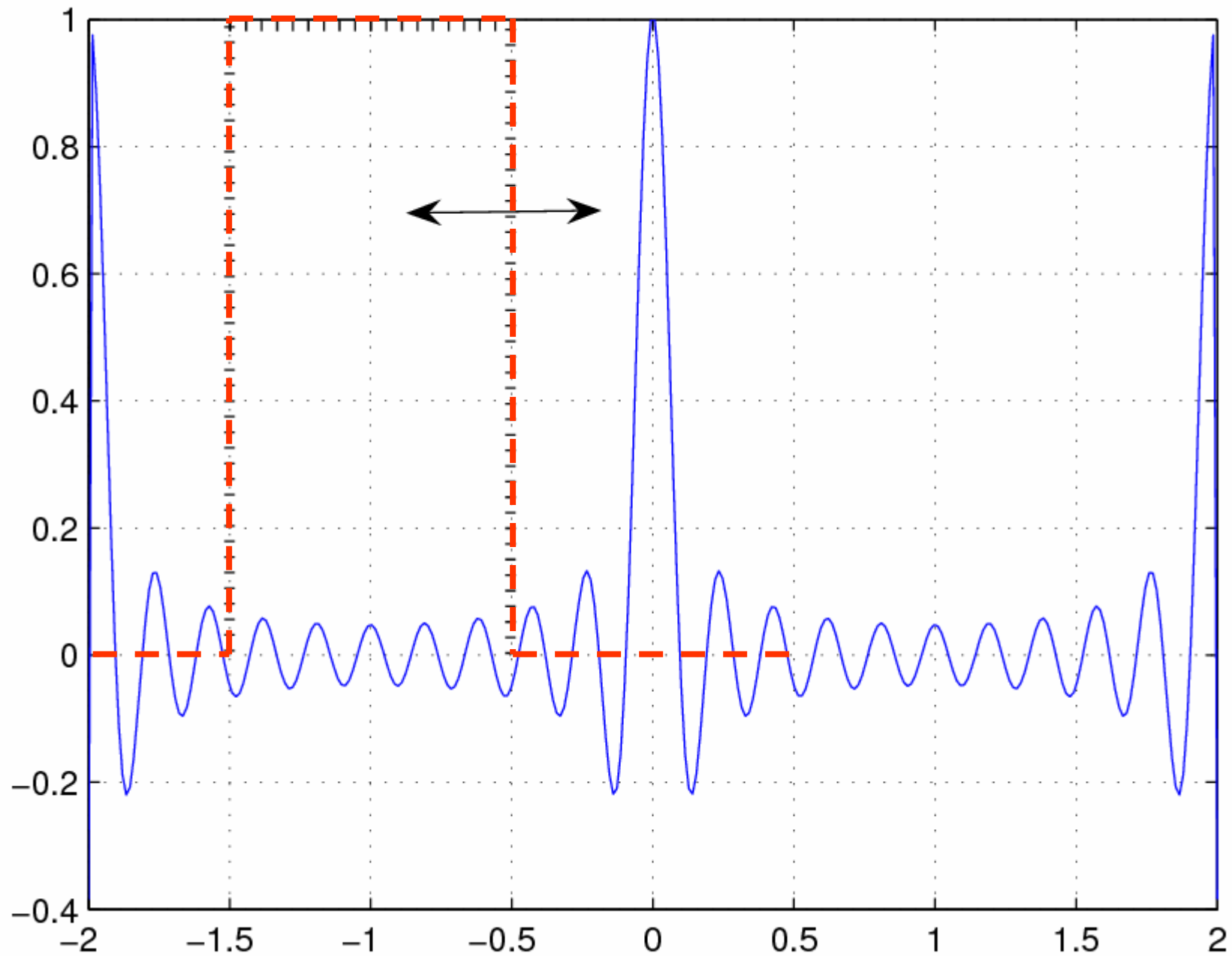
$$w_R[n] = \begin{cases} 1 & 0 \leq |n| \leq M \\ 0 & \text{außerhalb} \end{cases}$$

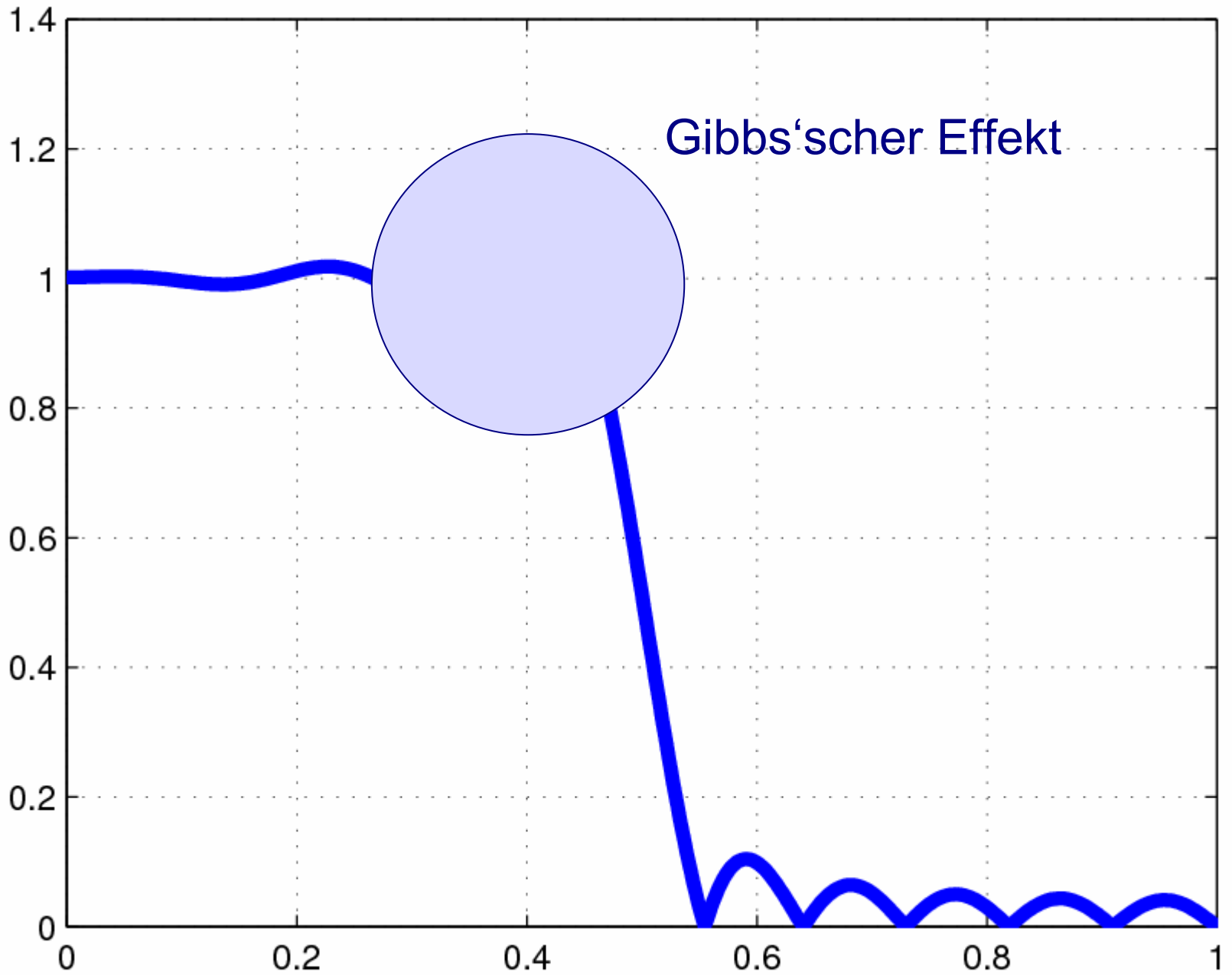
$$W_R(\hat{\omega}) = \sum_{n=-M}^M e^{j\hat{\omega}n} = \frac{\sin\left[\frac{(2M+1)\hat{\omega}}{2}\right]}{\sin\frac{\hat{\omega}}{2}}$$

$$h_{TP} = h_{iTP} \times w_R$$

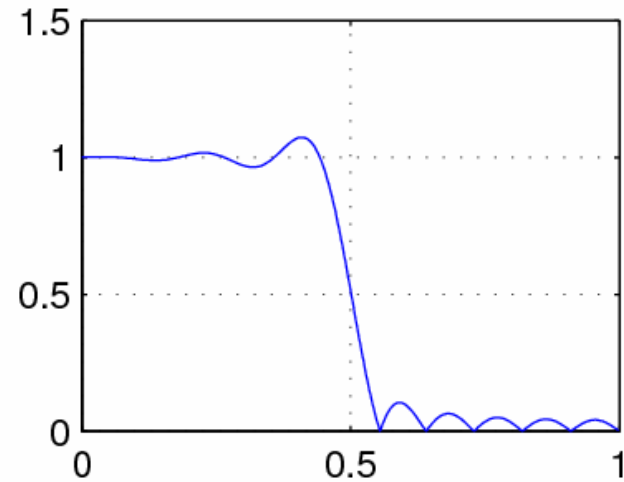
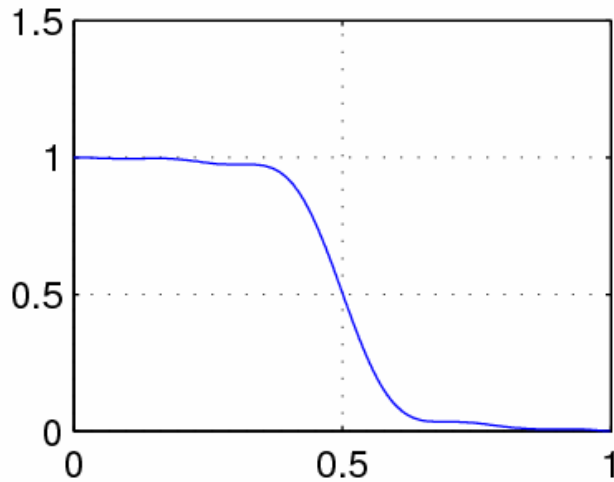
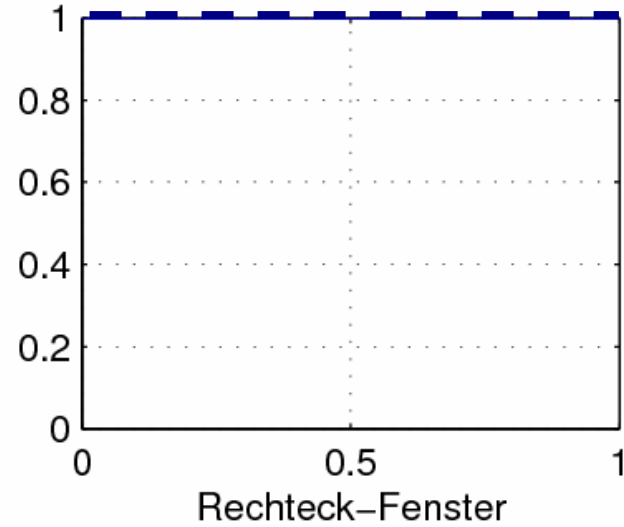
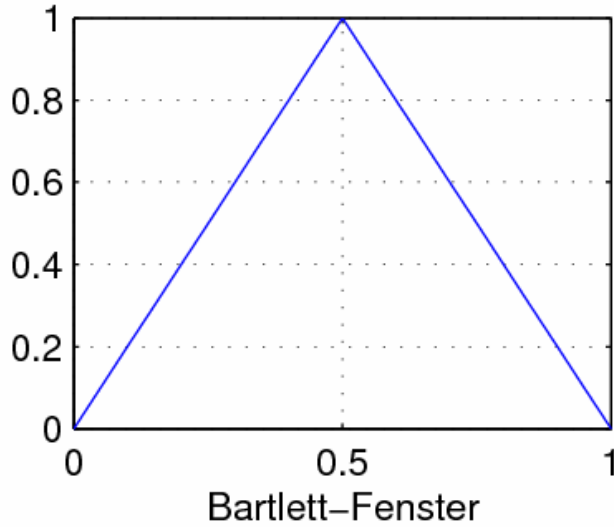


$$H_{TP}(\hat{\omega}) = H_{iTP}(\hat{\omega}) * W_R(\hat{\omega}) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} H_{iTP}(e^{j\phi}) W_R(e^{j(\hat{\omega}-\phi)}) d\phi$$

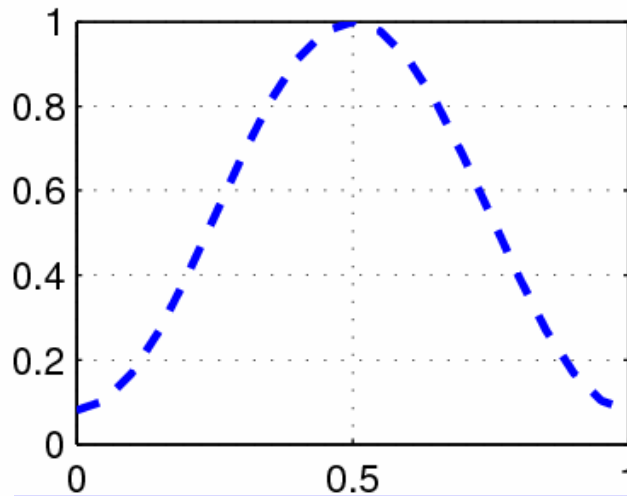




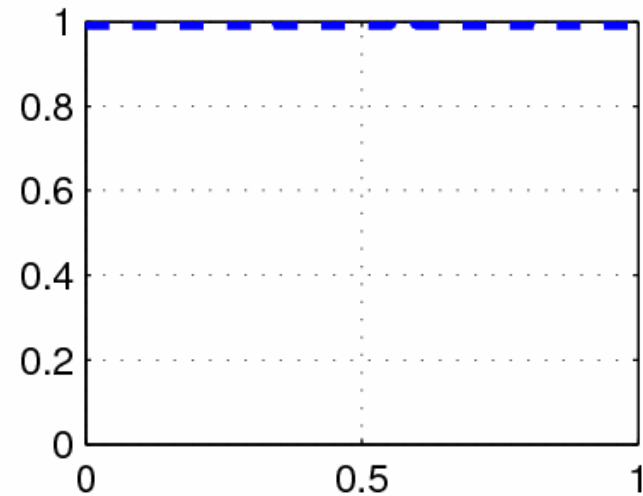
Fenster (1)



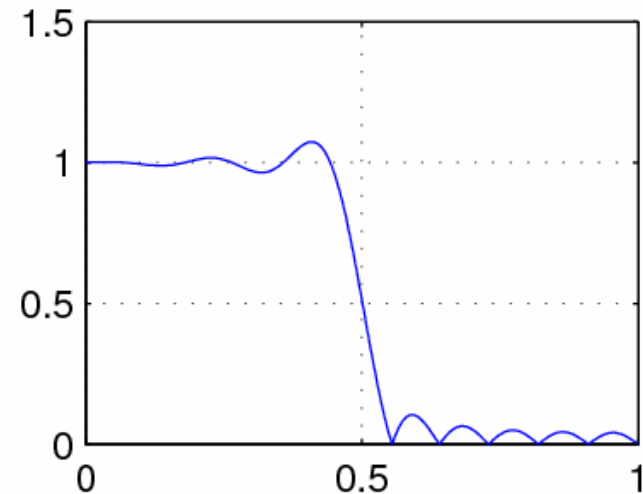
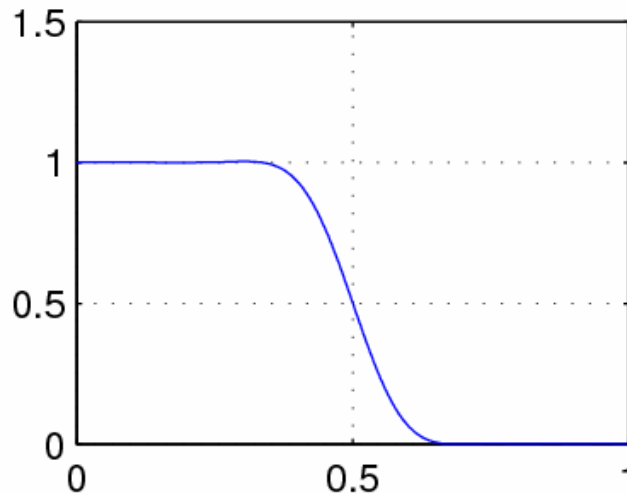
Fenster (2)



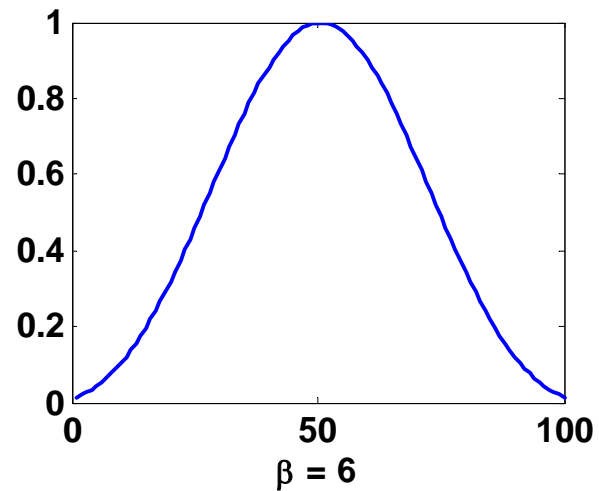
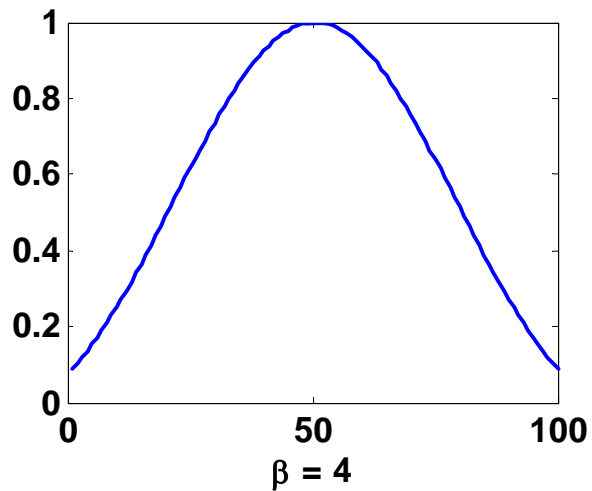
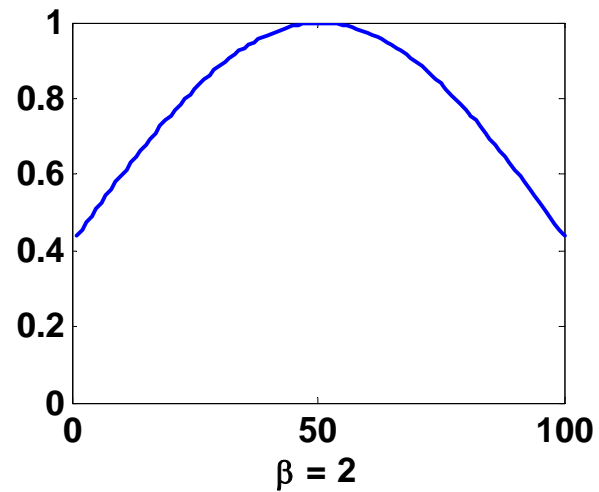
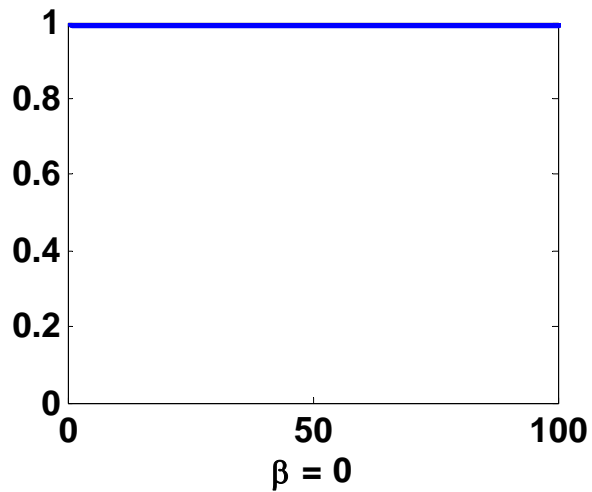
$$w_{\text{Hamming}}[n] = 0.54 + 0.46 \cos\left(\frac{2\pi n}{2M+1}\right) \quad -M \leq n \leq M$$



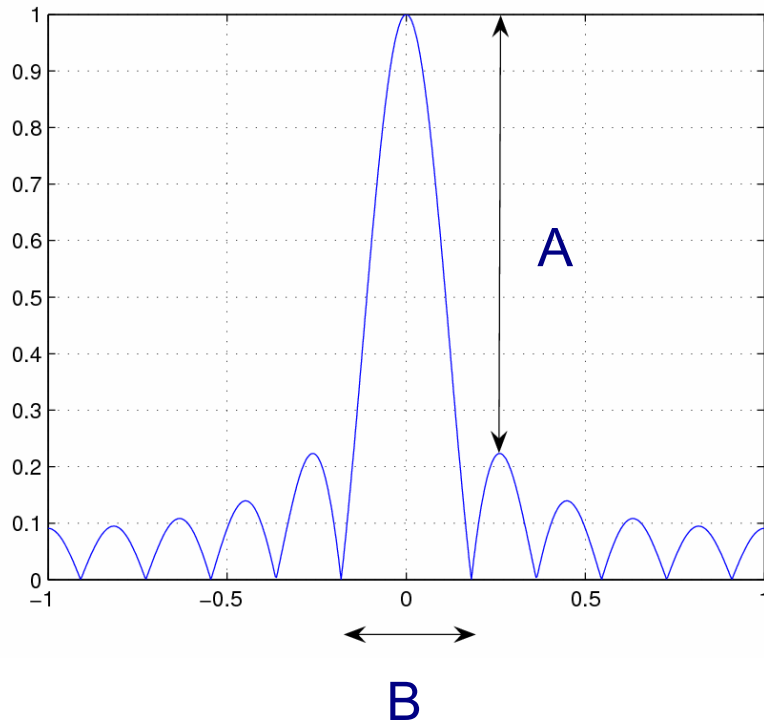
Rechteck-Fenster



$$w_{\text{Kaiser}} = \frac{I_0 \left[\beta \sqrt{1 - (n/M)^2} \right]}{I_0(\beta)}, \quad -M \leq n \leq M$$



Bewertung Fenster



Steile Flanke →
geringe Sperrdämpfung

Fenster	B	A
Rechteck	$4\pi/(2M+1)$	-13 dB
Hann	$8\pi/(2M+1)$	-32 dB
Hamming	$8\pi/(2M+1)$	-43 dB
Blackmann	$12\pi/(2M+1)$	-58 dB

FIR1

$B = \text{FIR1}(N, W_n)$ designs an N 'th order lowpass FIR digital filter and returns the filter coefficients in length $N+1$ vector B . The cut-off frequency W_n must be between $0 < W_n < 1.0$, with 1.0 corresponding to half the sample rate.

The filter B is real and has linear phase. The normalized gain of the filter at W_n is -6 dB.

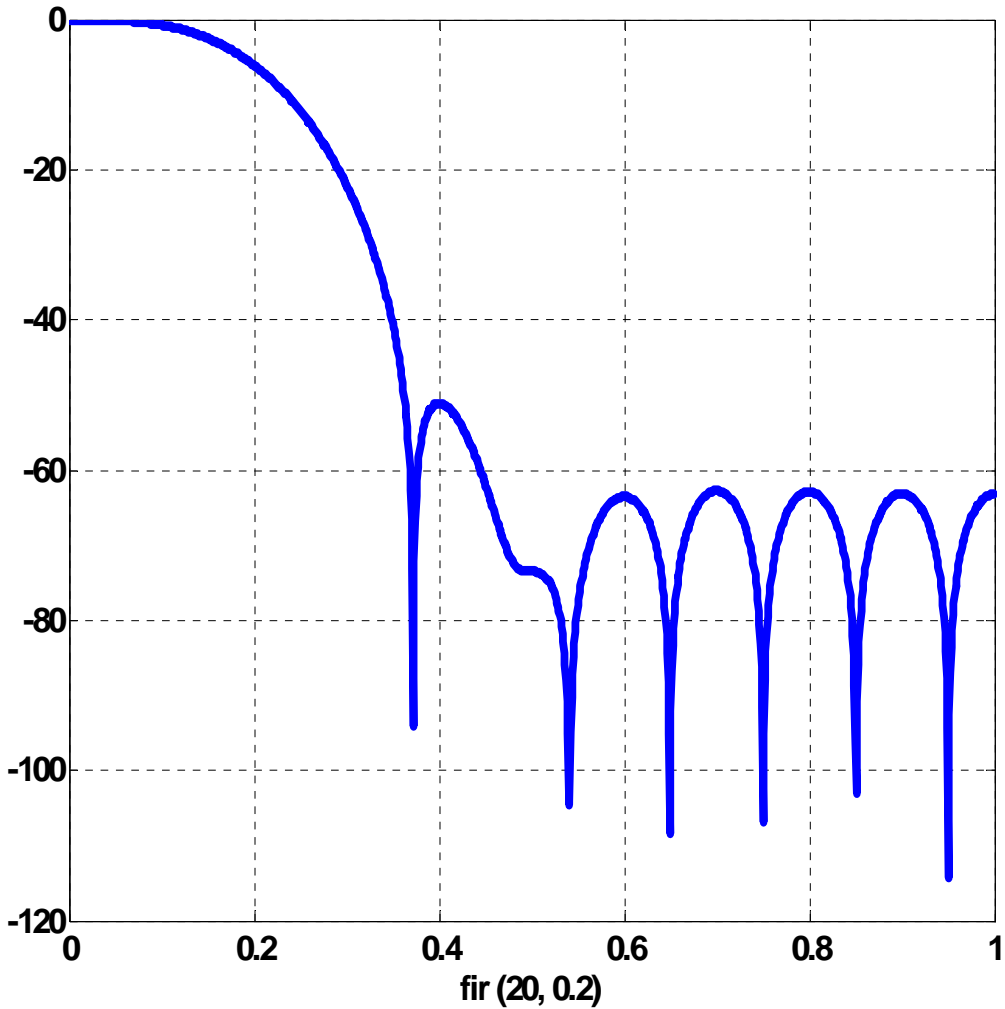
$B = \text{FIR1}(N, W_n, \text{'high'})$ designs an N 'th order **highpass** filter.

You can also use $B = \text{FIR1}(N, W_n, \text{'low'})$ to design a **lowpass** filter.

If W_n is a two-element vector, $W_n = [W_1 \ W_2]$, FIR1 returns an order N **bandpass** filter with passband $W_1 < W < W_2$. You can also specify $B = \text{FIR1}(N, W_n, \text{'bandpass'})$. If $W_n = [W_1 \ W_2]$, $B = \text{FIR1}(N, W_n, \text{'stop'})$ will design a **bandstop** filter.

$B = \text{FIR1}(N, W_n, \text{WIN})$ designs an N-th order FIR filter using the N+1 length vector WIN to window the impulse response. If empty or omitted, FIR1 uses a Hamming window of length N+1.

For a complete list of available windows, see the help for the WINDOW function. KAISER and CHEBWIN can be specified with an optional trailing argument. For example, $B = \text{FIR1}(N, W_n, \text{kaiser}(N+1, 4))$ uses a Kaiser window with beta=4. $B = \text{FIR1}(N, W_n, \text{'high'}, \text{chebwin}(N+1, R))$ uses a Chebyshev window with R decibels of relative sidelobe attenuation.



```

% Lowpass filter
% Ordnung 20
%
b=fir1(20,0.2);
disp (b);

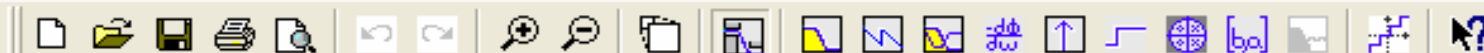
[h,w]=freqz(b,1,1024);
mag=20*log10(abs(h));
plot(w/pi,mag);grid

```

Praktischer Filterentwurf

Entwurfsprogramme erlauben die Festlegung von Durchlass- und Sperrbereichen.

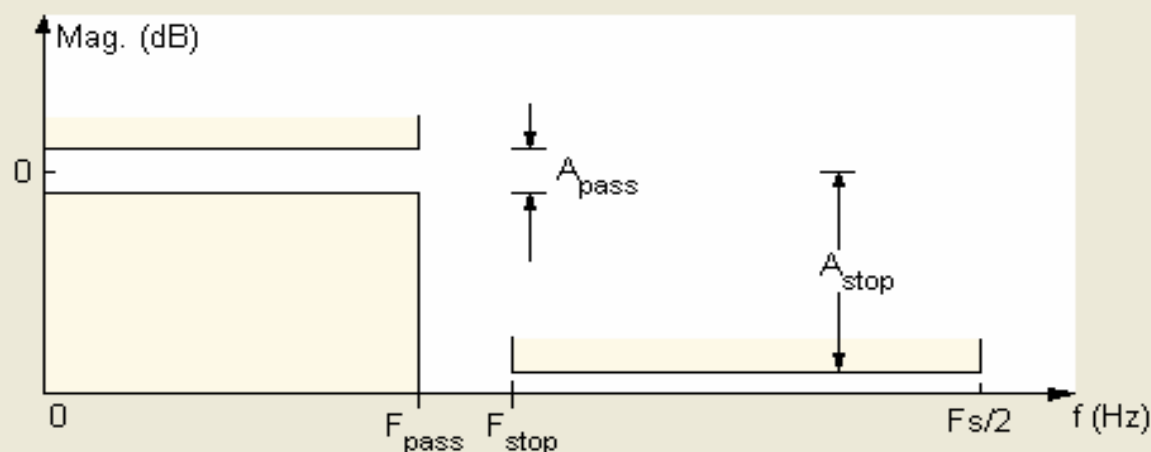
Filtercharakteristiken reagieren sehr empfindlich auf Pol-Nullstellenlagen!



Current Filter Information

Structure: Direct form FIR
 Order: 50
 Sections: 1
 Stable: Yes
 Source: Designed

Filter Specifications



Filter Type

- Lowpass
- Highpass
- Bandpass
- Bandstop
- Differentiator

Design Method

- IIR Butterworth
- FIR Equiripple

Filter Order

- Specify order: 10
- Minimum order

Options

Density factor: 16

Frequency Specifications

Units: Hz
 Fs: 48000
 Fpass: 9600
 Fstop: 12000

Magnitude Specifications

Units: dB
 Apass: 1
 Astop: 80

Design Filter

Zusammenfassung (1)

- FIR-Filter verwenden ausschließlich Werte der Eingangsfolge $x[n]$.
- Durch Wahl der Filterkoeffizienten $b[k]$ kann das gewünschte Verhalten des Filters (Tiefpass, Hochpass, Bandpass, Bandsperre) verwirklicht werden.
- Zur Untersuchung der Eigenschaften von (FIR-) Filtern verwendet man die Impulsantwort und den Frequenzgang.
- Die Impulsantwort – und daher auch die Einschwing- und Abklingzeit – von FIR-Filtern hat endliche Dauer.

Zusammenfassung (2)

- FIR-Filter können lineare Phase haben, eine Eigenschaft, die für die Erhaltung der Kurvenform von Signalen wichtig ist.
- FIR-Filter sind immer stabil und lassen sich gut in Hardware und Software realisieren.
- FIR-Filter sind bei gleicher Ordnung weniger selektiv als IIR-Filter oder umgekehrt zur Realisierung einer gewünschten Filterselektivität ist bei FIR-Filtern eine höhere Ordnung als bei IIR-Filtern erforderlich, was zu höheren Implementierungskosten führt.