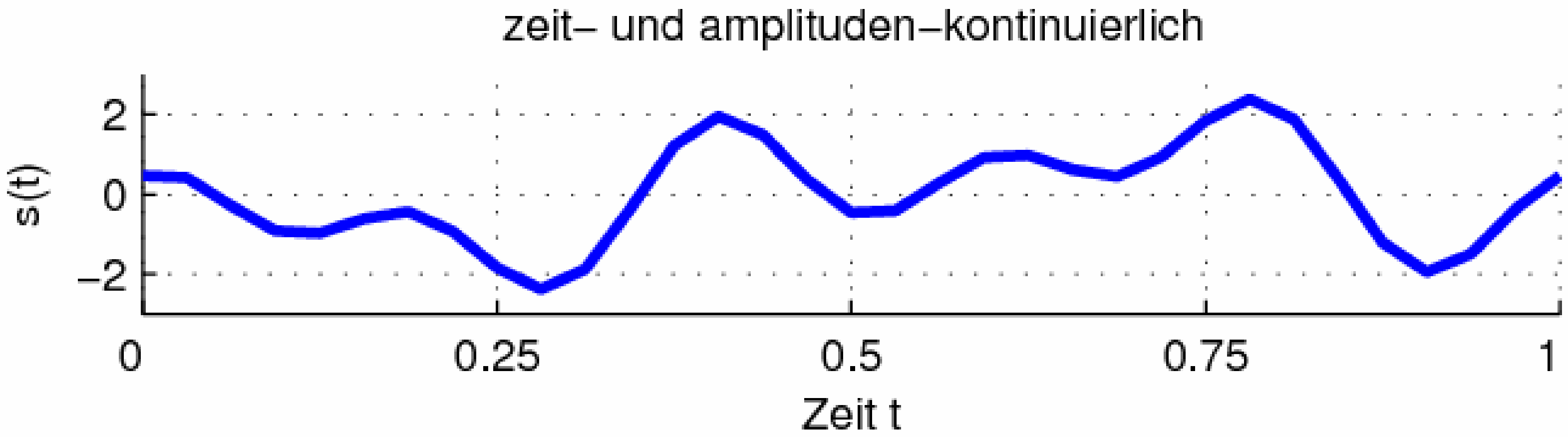
Signale

- Ein Signal ist eine sich verändernde physikalische Größe die Information trägt. Z.B. Sprach-, Audio-, Video-, Temperatursignale,…
- Signale werden in der Regel durch Variation physikalischer Größen repräsentiert, diese Größen können verändert, gespeichert und übertragen werden. → Energieverbrauch
- Signale können in den verschiedensten Formen und Darstellungen auftreten, z.B. Sprache/ akustisches Signal → Mikrophon/elektrisches Signal → Magnetisierung/magnetisches Signal → Zahlenfolge/digitales Signal (CD)

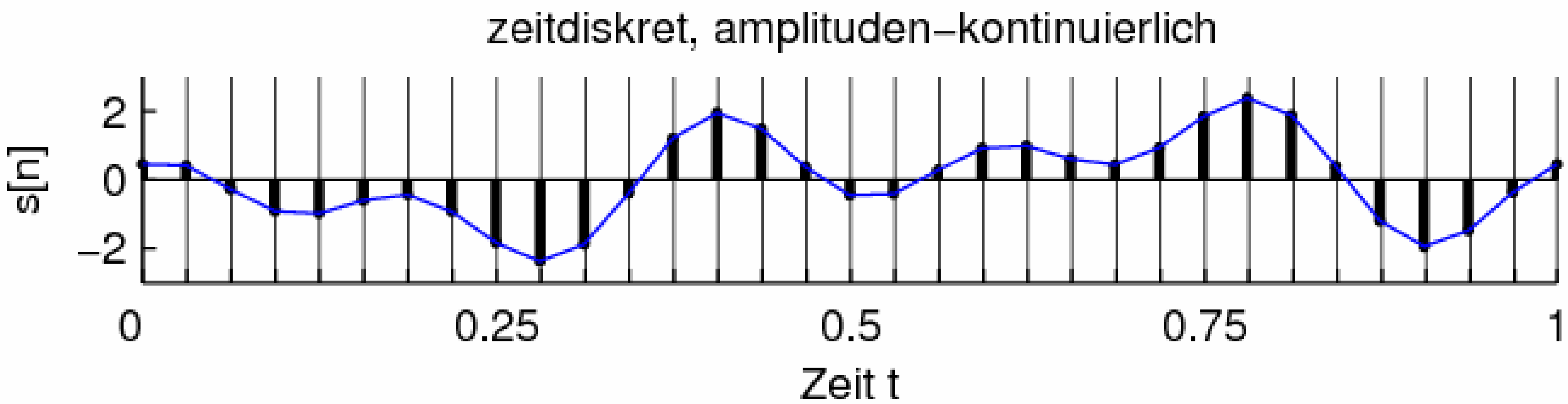
- Signale können durch (analoge und digitale) Signalverarbeitungssysteme beeinflusst, geändert, aufgezeichnet, wiedergegeben, übertragen werden. (z.B. Kassettenrekorder, CD-Spieler)
- Systeme arbeiten mit Signalen als Eingangsgröße(n) und erzeugen neue Signale oder neue Signaldarstellungen als Ausgangs-größen(n)

- Signale und Systeme werden in mathematischer Form dargestellt.
- Damit ist die Beschreibung und das Verständnis von Signalen und Systemen möglich und auch der Entwurf und die Implementierung von Systemen, die eine gewünschte Eigenschaft haben.

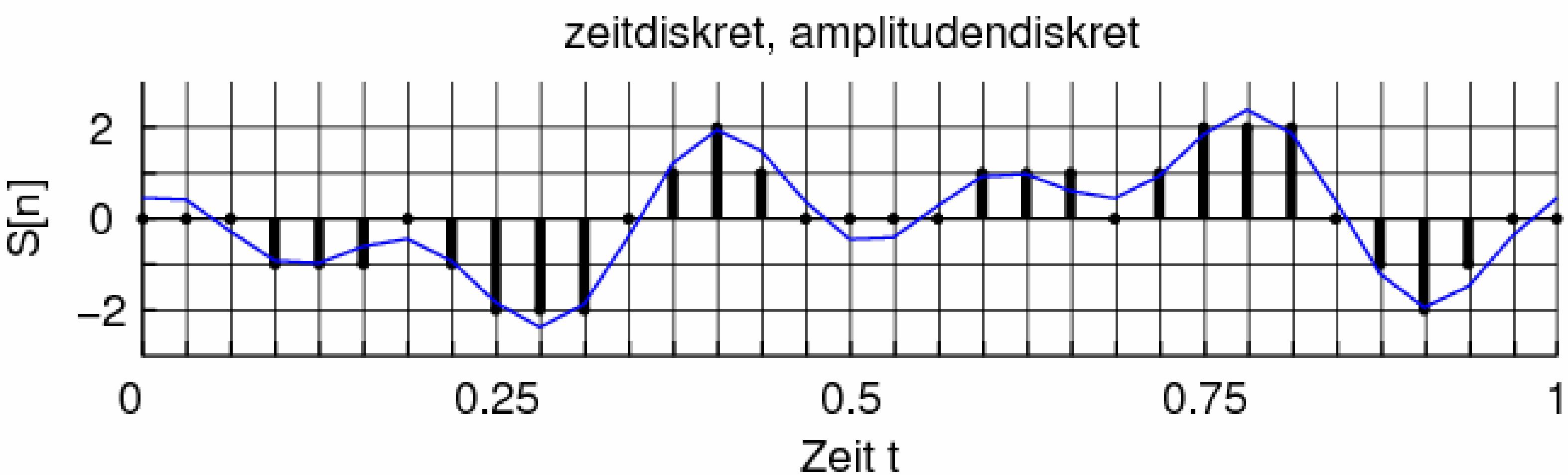
- Es gibt unzählige verschiedene Signale. Um zu einer Signaldarstellung zu kommen zerlegt man Signale daher in einfachere »Aufbausignale«.


zeit– und amplituden–kontinuierlich
s(t)
2
0
–2
0
0.25
0.5
0.75
1
Zeit t

ASP


zeitdiskret, amplituden–kontinuierlich
s[n]
2
0
–2
0
0.25
0.5
0.75
1
Zeit t

ASP


zeitdiskret, amplitudendiskret
S[n]
2
0
–2
0
0.25
0.5
0.75
1
Zeit t

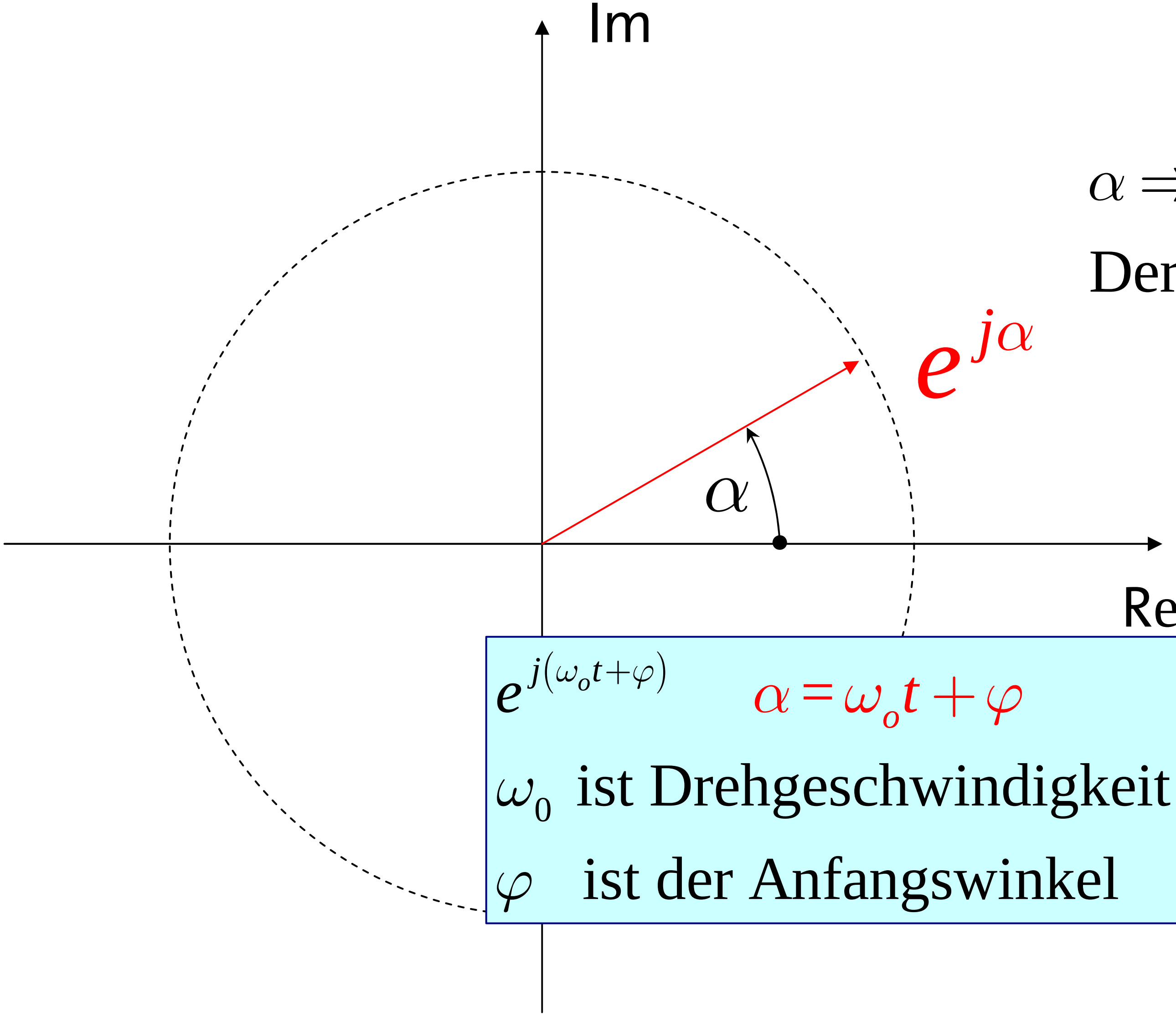
DSP

(Ko)Sinus als Aufbaufunktion

$$x(t) = A\cos(\omega_0 t + \varphi)$$

Komplexe Exponentialfunktion

$$\boxed{\begin{aligned} \overline{x}(t) &= Ae^{j(\omega_0 t + \varphi)} = A\cos\left(\omega_0 t + \varphi\right) + jA\sin\left(\omega_0 t + \varphi\right) \\ x(t) &= \mathrm{Re}\left\{Ae^{j(\omega_0 t + \varphi)}\right\} = A\cos\left(\omega_0 t + \varphi\right) \end{aligned}}$$



$\alpha \Rightarrow \alpha(t)$

Der Zeiger dreht sich.

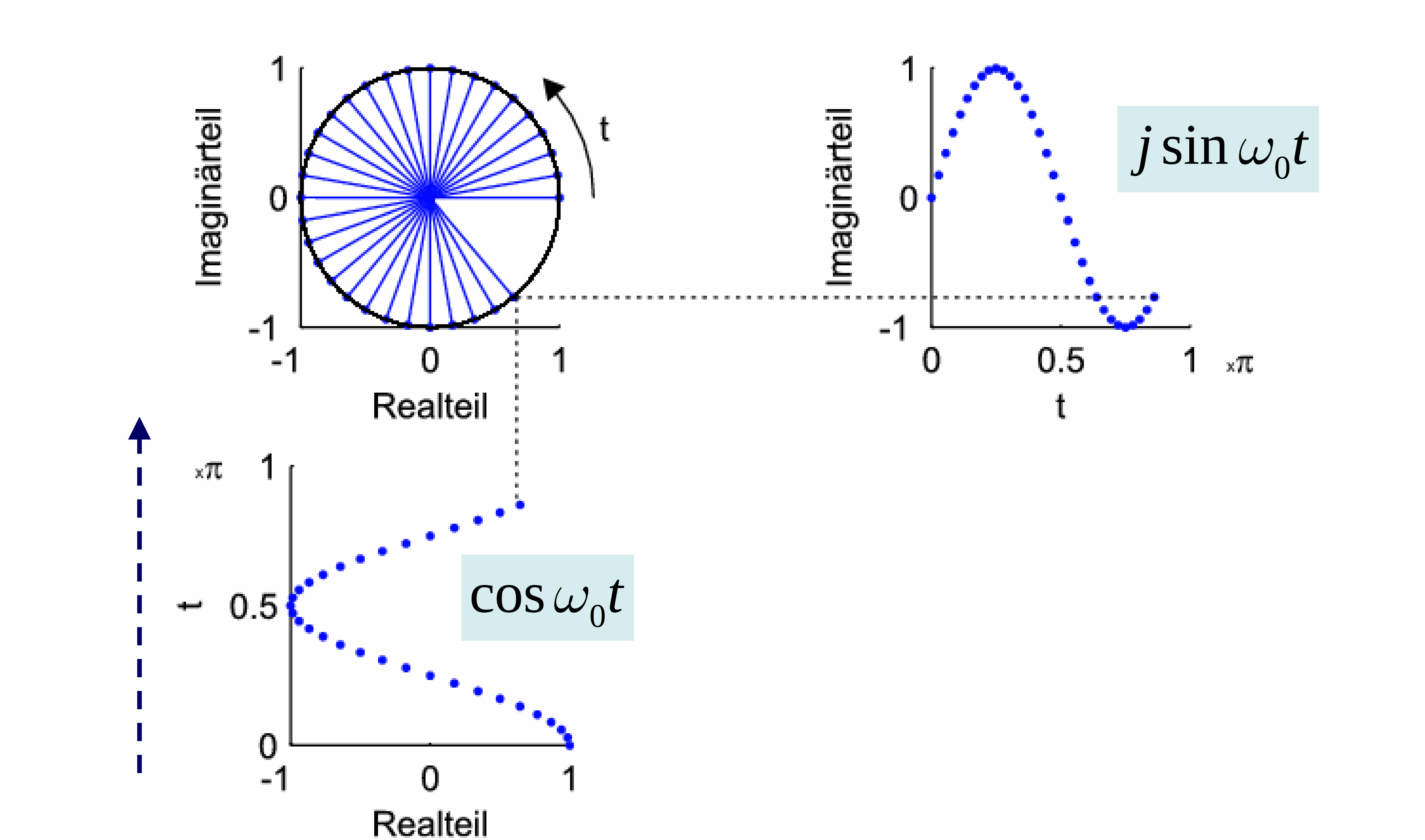
$e^{j(\omega_o t+\varphi)}$ $\alpha = \omega_o t + \varphi$

ω_0 ist Drehgeschwindigkeit [Bogen/Sekunde]

φ ist der Anfangswinkel

[Bogen/Sekunde] können wir uns schwer vorstellen,
daher verwenden wir lieber die Zahl der Umdrehungen = Frequenz $\omega = 2\pi \cdot f$

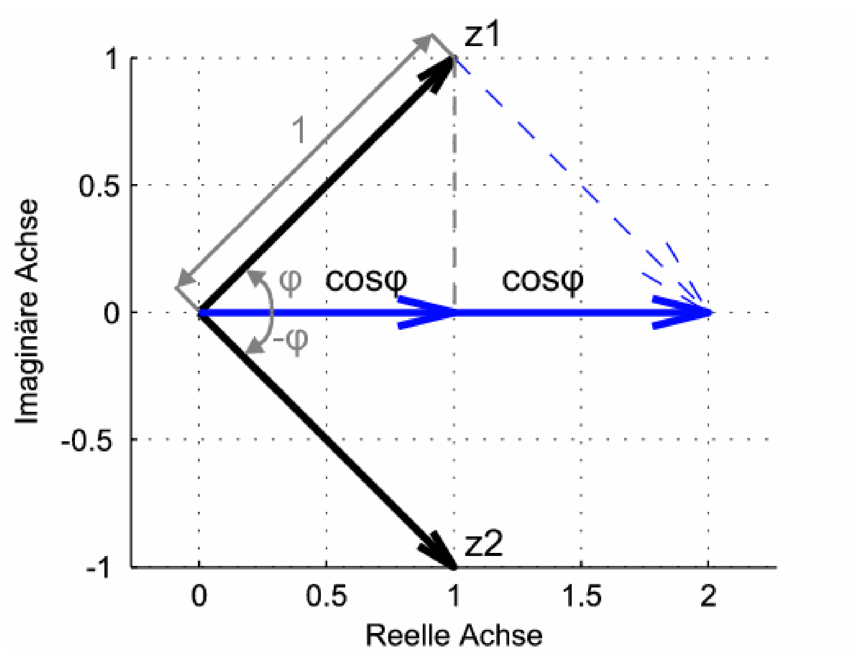
Zeiger als »(Ko)Sinus-Maschine«



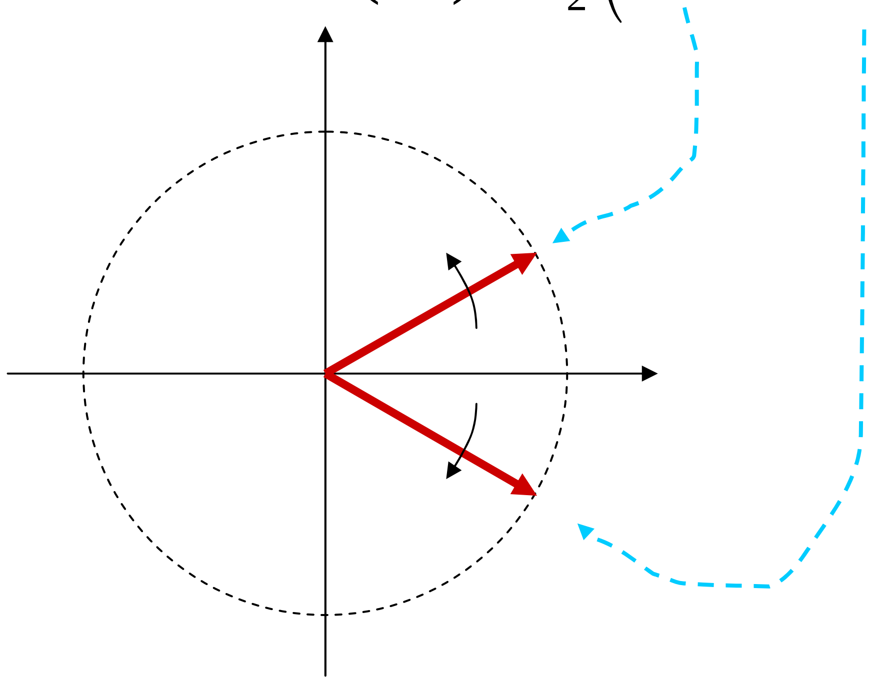
Inverse Eulersche Formel

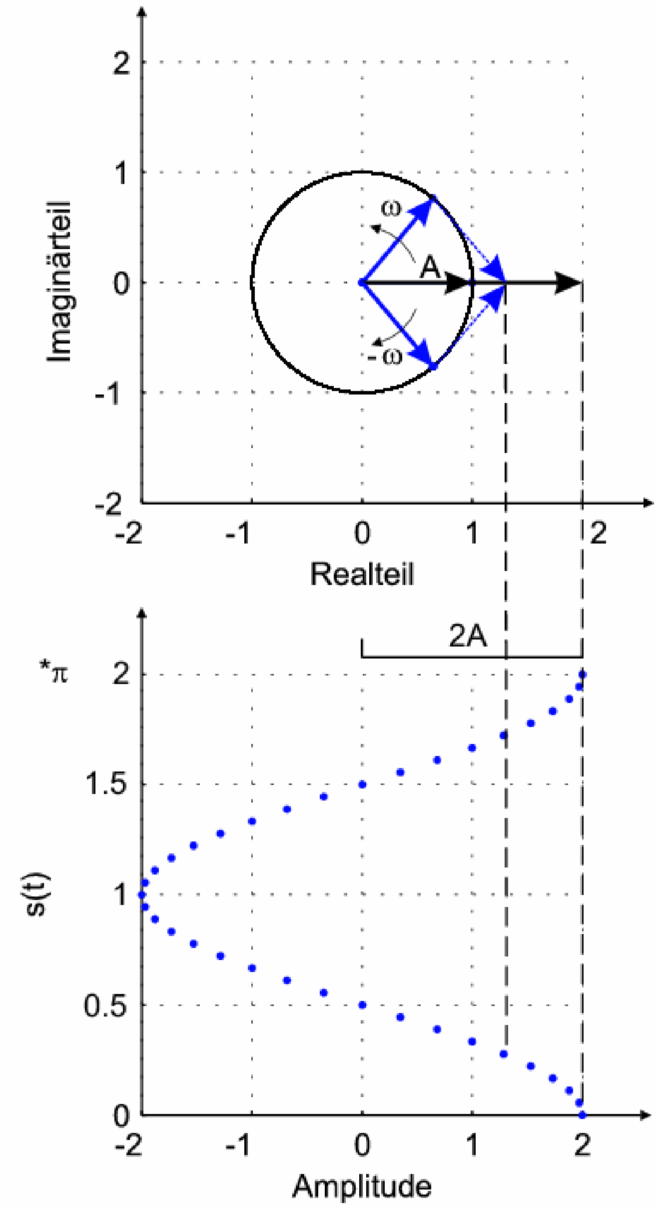
$$\cos\varphi = \frac{e^{j\varphi} + e^{-j\varphi}}{2}$$

$$\sin\varphi = \frac{e^{j\varphi} - e^{-j\varphi}}{2j}$$



$$\cos(\omega t) = \frac{1}{2}\left(e^{j\omega t} + e^{-j\omega t}\right)$$

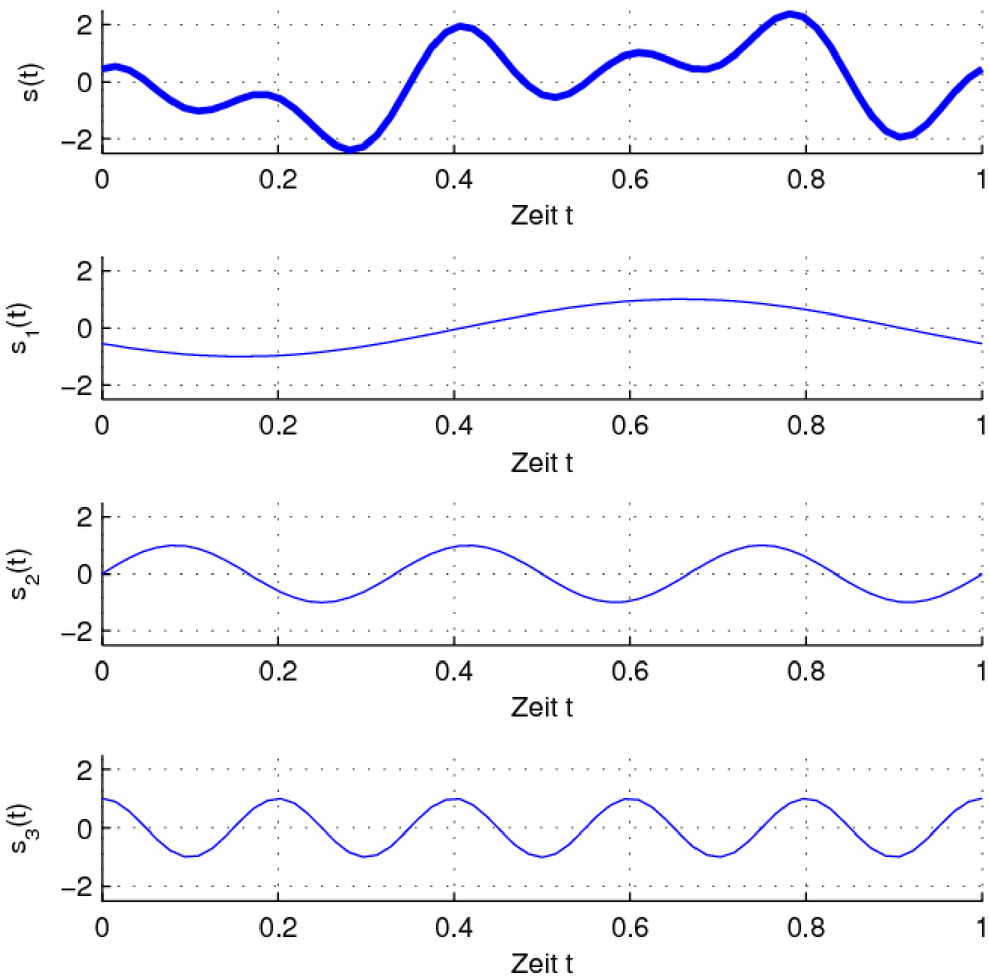




Links- und rechtsdrehende Zeiger erzeugen die reelle Kosinusfunktion.

➔ Positive und negative Frequenzen!

Zusammensetzung aus »Tönen«



Synthese periodischer Signale

Wir betrachten zusammengesetzte Kosinussignale:

$$x(t) = A_0 + \sum_{k=1}^{N} A_k \cos(2\pi f_k t + \varphi_k) = X_o + \Re e\left\{\sum_{k=1}^{N} X_k e^{j2\pi f_k t}\right\}$$

$$X_k = A_k e^{j\varphi_k}$$

Periodische Signale lassen sich aus Sinusschwingungen aufbauen, die aus der Grundschwingung $f_0 = 1/T_0$ und aus Oberschwingungen bestehen. Die Oberschwingungen sind **ganzzahlige** Vielfache der Grundschwingung.

»Komplexe« Amplitude

Phase in reeller Darstellung ➔

$$A_k \cos(2\pi f_k t + \varphi_k)$$

$$\Updownarrow$$

$$A_k e^{j(2\pi f_k t + \varphi_k)} = A_k e^{j\varphi_k} \cdot e^{j2\pi f_k t}$$

$$= \bar{X}_k \cdot e^{j2\pi f_k t}$$

$$\Downarrow$$

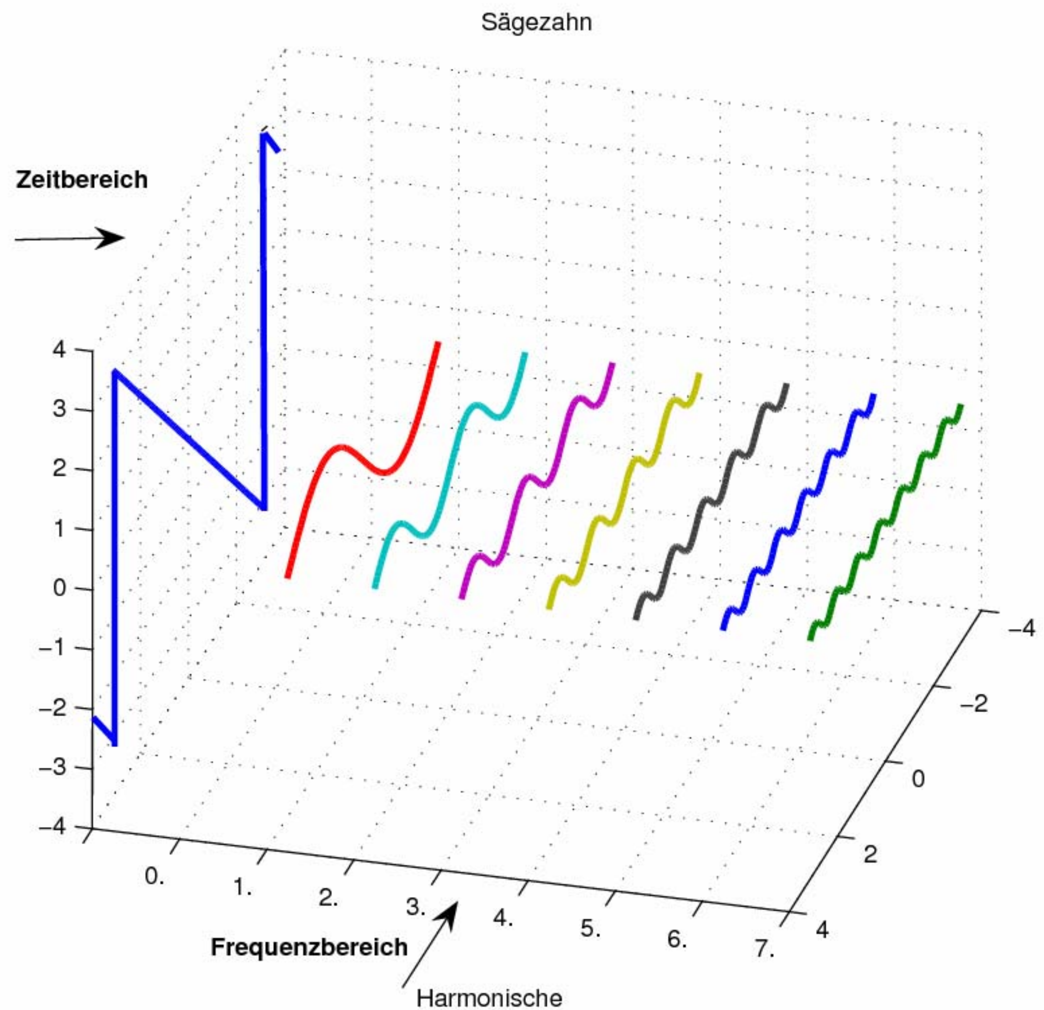
Komplexe Amplitude bei der komplexen Exponentialfunktion.

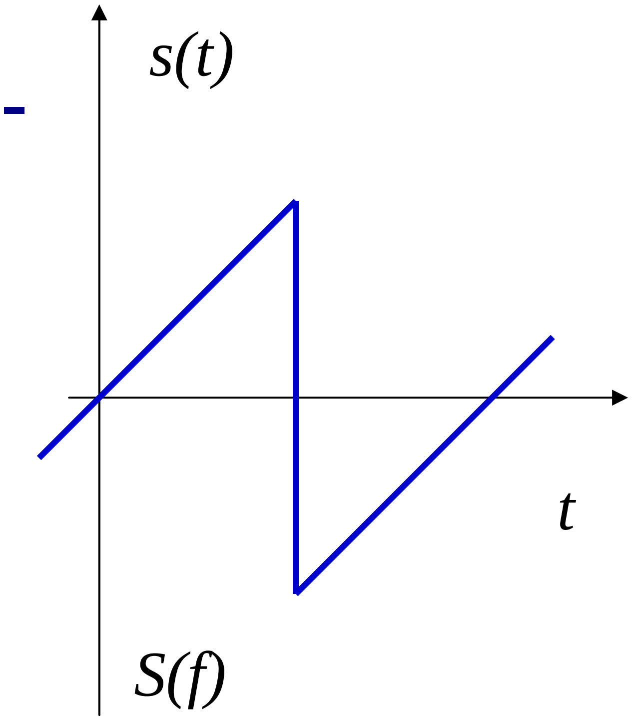
Warum Kosinus?

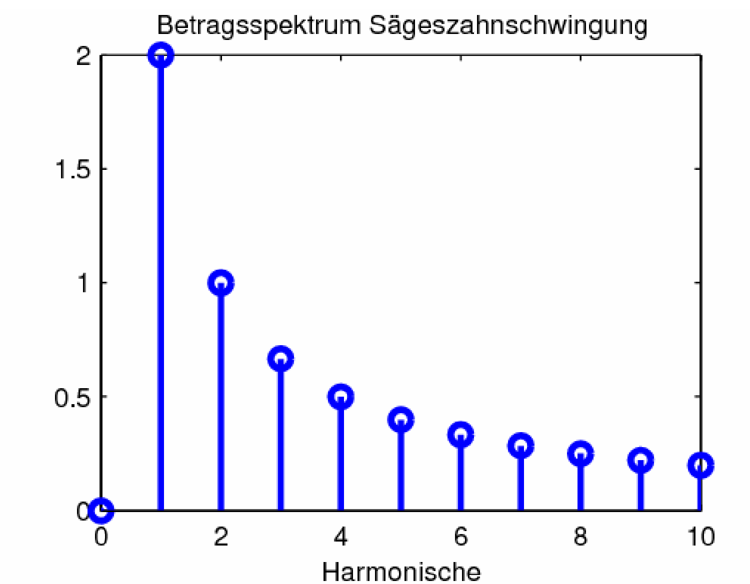
- Bei Verwendung des Kosinus lässt sich der Gleichanteil als Frequenz Null beschreiben.

$$A\cos(2\pi f \cdot t) = A\cos(0t) = A$$

Zeitbereichs- und Frequenzbereichs- (Spektral)Darstellung







Zweiseitiges Spektrum

Die Anwendung der inversen Euler-Formel liefert folgende alternative Darstellung:

$$x(t) = X_o + \sum_{k=1}^{N} \left\{ \frac{X_k}{2} e^{j 2\pi f_k t} + \frac{X_k^{\;*}}{2} e^{-j 2\pi f_k t} \right\}$$

x(t) **erzeugt durch rechts- und linksdrehende Zeiger.**

➔ Zweiseitiges Spektrum

$$\left\{ (X_o, 0), \left(\frac{1}{2} X_{1,} f \right)_1, \left(\frac{1}{2} X_{1,} - f \right)_1, \left(\frac{1}{2} X_{2,} f_2 \right), \left(\frac{1}{2} X_{2,} - f_2 \right), \ldots \right\}$$

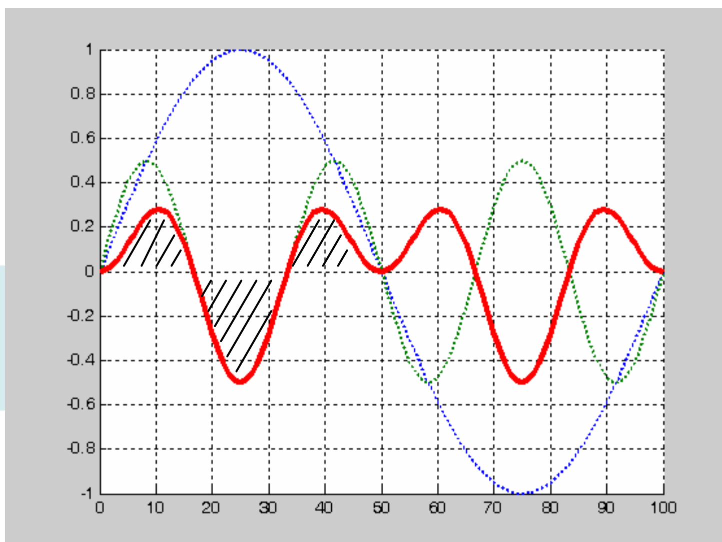
Analyse von periodischen Schwingungen

1. Wir nehmen an, dass unser Signal ungerade ist und daher nur aus Sinusschwingungen besteht.
2. Wir multiplizieren unser Signal *s(t)* mit sin$\omega_0 t$ und bilden den Mittelwert über die Periodendauer.

$$\int_0^T \sin n\omega t \cdot \sin m\omega t \, dt = \begin{cases} 0 & \text{für } m \neq n \\ \frac{T}{2} & \text{für } m = n \end{cases}$$

$$\int_T \sin^2(\omega_o t)\, dt = \frac{1}{2}\int_T (1-\cos 2\omega_o t)\, dt = \frac{T}{2}$$

$$\int_0^T \sin \omega t \cdot \sin 3\omega t dt = 0$$



3. Es werden alle in *s(t)* enthaltenen Sinuskomponenten mit $\sin \omega_0 t$ multipliziert und integriert. Die in *s(t)* enthaltene Komponente von $\sin \omega_0 t$ gibt ein Ergebnis nach der Integration, alle anderen Integrale sind Null.
   Multiplikation und Integration mit $\sin \omega_0 t$ „saugen“ aus *s(t)* die Spektralkomponente ω_0.
4. Um die weiteren Spektralkomponenten zu bestimmen setzen wir $\sin(k\omega_0 t)$, $k = 2, 3, \ldots$

$$\boxed{B_k = \frac{2}{T} \int_0^T s(t) \sin\left(k\omega_o t\right) dt}$$

Reell-wertige Darstellung der Fourierreihe.

- Für ein gerades Signal erhalten wir in der reell-wertigen Darstellung:

$$\boxed{A_k = \frac{2}{T}\int_0^T s(t)\cos\left(k\omega_o t\right)dt}$$

- Signale die weder gerade noch ungerade sind müssen aus Sinus- und Kosinus-Schwingungen zusammengesetzt werden. Es müssen daher die Koeffizienten a_k und b_k berechnet werden.

Komplex-wertige Darstellung der Fourierreihe

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \vec{D}_k e^{jk\omega_0 t} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \vec{D}_k e^{jk\frac{2\pi}{T_0}t}$$

$$\vec{D}_k = \frac{1}{T_0}\int_0^{T_0} x(t) e^{-\frac{j2\pi k}{T_0}t} dt$$

$$s(t) = \frac{A_0}{2} + A_1 \cos \omega_0 t + A_2 \cos 2\omega_0 t + \ldots + A_n \cos n\omega_0 t +$$
$$+ B_1 \sin \omega_0 t + B_2 \sin 2\omega_0 t + \ldots + B_n \sin n\omega_0 t$$

$$A_k = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \cos k\omega_0 t dt$$

$$\frac{A_0}{2} = \text{Mittelwert von } s(t)$$

$$B_k = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \sin k\omega_0 t dt$$

reell Sinus + Kosinus

$$s(t) = C_0 + C_1 \cos\left(\omega_0 t + \varphi_1\right) + C_2 \cos\left(2\omega_0 t + \varphi_2\right) + \ldots + C_n \cos\left(n\omega_0 t + \varphi_n\right)$$

$$C_k = \sqrt{A_k^{\,2} + B_k^{\,2}}, \qquad \tan \varphi_k = \frac{-B_k}{A_k}$$

reell Kosinus + Phase

$$s(t) = \sum_{k=-\infty}^{k=\infty} \vec{D}_k e^{jk\omega_0 t}$$

$$\vec{D}_k = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) e^{-jk\omega_0 t} dt = \begin{cases} \frac{1}{2} A_0 & \text{für } k = 0 \\ \frac{1}{2}(A_k - jB_k) & \text{für } k > 0 \\ \frac{1}{2}(A_{-k} + jB_{-k}) & \text{für } k < 0 \end{cases}$$

komplex

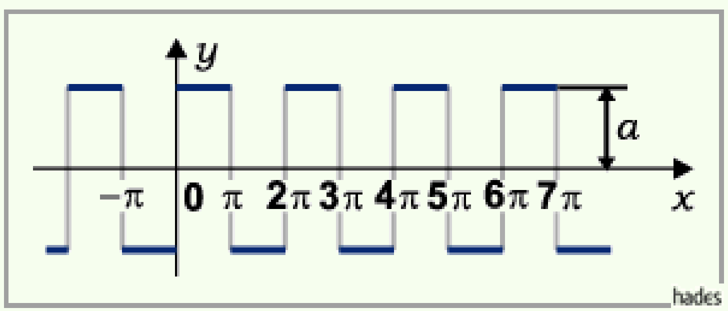
Fourierkoeffizienten

Die Fourierkoeffizienten in Formelsammlungen sind häufig für andere Ausgangsdarstellungen von x(t) angegeben.

Rechteckimpulsförmige periodische Funktionen

5. $$y = \begin{cases} a \text{ für } 0 < x < \pi\,, \\ -a \text{ für } \pi < x < 2\pi\,, \end{cases}$$

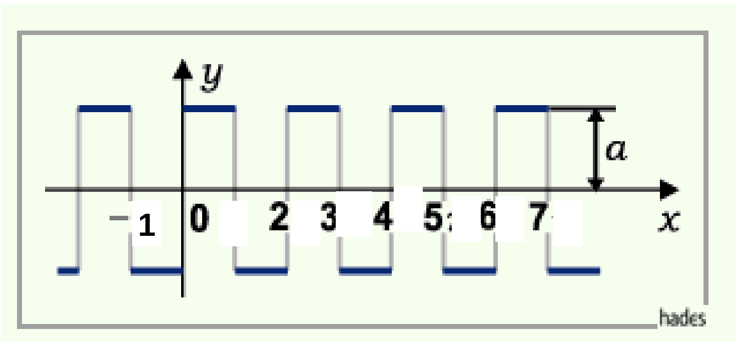
$$y = \frac{4a}{\pi}\left(\sin x + \frac{\sin 3x}{3} + \frac{\sin 5x}{5} + \cdots\right).$$



$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{2\pi} = 1$$

$$y(t) = \frac{4a}{\pi}\left(\sin 1 \cdot t + \tfrac{1}{3}\sin 3 \cdot t + \ldots\right)$$

Skalierung der Zeitachse



$$\omega_0 = \frac{2\pi}{2} = \pi$$

$$t \to \pi \cdot t$$

$$y(t) = \frac{4a}{\pi}\left(\sin \pi \cdot t + \tfrac{1}{3}\sin 3\pi \cdot t + \ldots\right)$$

Komplexe Darstellung-Zeigerinterpretation

$$s(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \vec{D}_k e^{jk\omega_0 t}$$

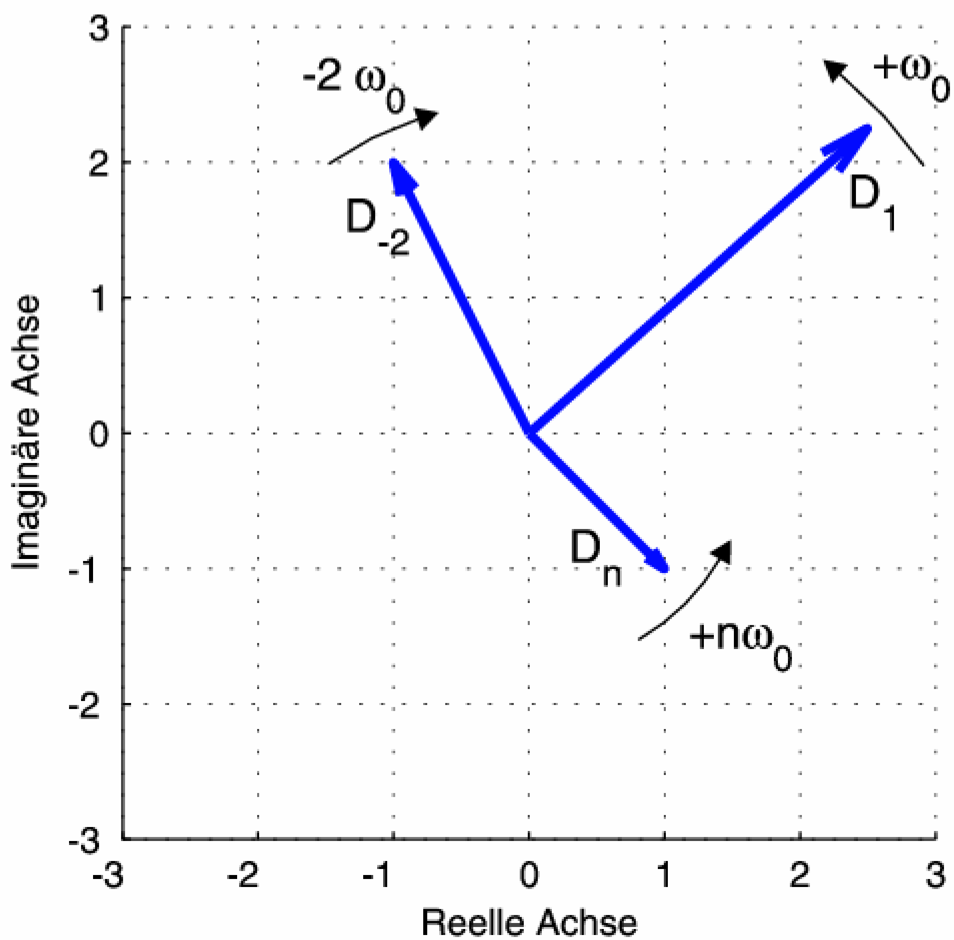
Zur Berechnung der $\vec{D}_k$ multiplizieren wir mit $e^{-jm\omega_0 t}$ und integrieren über die Periodendauer:

$$s(t)e^{-jm\omega_0 t} = \left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} \vec{D}_k e^{jk\omega_0 t} \right) e^{-jm\omega_0 t} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \vec{D}_k e^{j(k-m)\omega_0 t}$$

$$\int_T e^{j(k-m)\omega_0 t} dt = \begin{cases} T & \text{für } k = m \\ 0 & \text{für } k \neq m \end{cases}$$

$$\vec{D}_k = \frac{1}{T} \int_T s(t) e^{-jk\omega_0 t} dt \qquad k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

Zeigerinterpretation

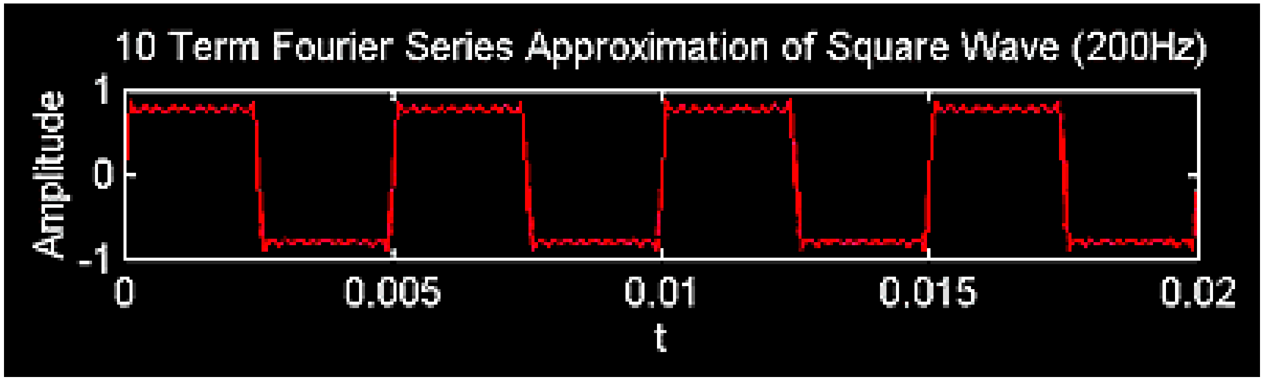


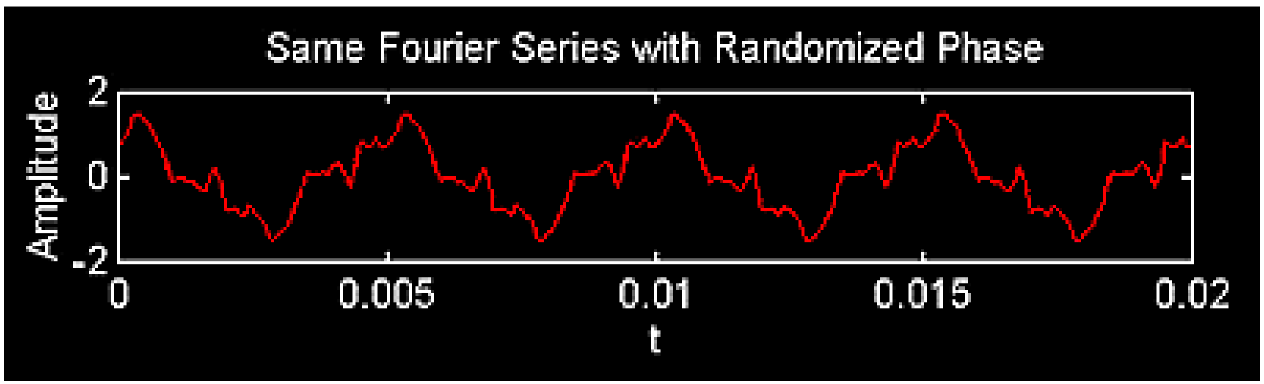
Die Zeiger rotieren mit verschiedenen Winkelgeschwindigkeiten und beschreiben in ihrer Gesamtheit (auf der reellen Achse) die (reelle) Funktion $s(t)$.

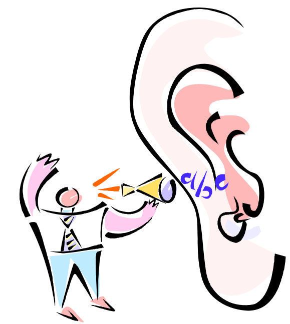
Zur Berechnung einer Komponente D_k »hält« man den drehenden Zeiger an, in dem man das ganze Diagramm mit der Geschwindigkeit $k\omega_0$ in die andere Richtung dreht. (Das entspricht der Multiplikation mit $e^{-jk\omega_0 t}$.)

Bildet man nun den Mittelwert über die Periodendauer (das Integral von 0 bis T), so ist dieser für die stillstehende Komponente gleich D_k, für alle anderen Komponenten aber Null, da der Mittelwert einer Kreisfunktion über mehrere Perioden gleich Null ist.

Spektralanalyse







Die Signale klingen gleich.

Das Ohr ist wenig phasenabhängig!

http://www.jhu.edu/~signals/listen-new/listen-newindex.htm

Ohr und Phase

Sprachverständlichkeit = Silbenverständlichkeit

Silbe = Signal

t_{silbe} = 10 – 100 ms

Wenn $\Delta\tau$ der Silben Bruchteile von ms betragen (keine lineare Phase), erkennt das Ohr keinen Unterschied.

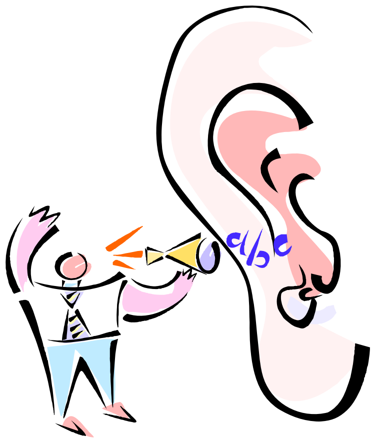
$$\tau = -\frac{d\varphi(\omega)}{d\omega} = -\frac{\angle H(\omega)}{d\omega}$$

Das Ohr ist dafür aber sehr amplitudenempfindlich !

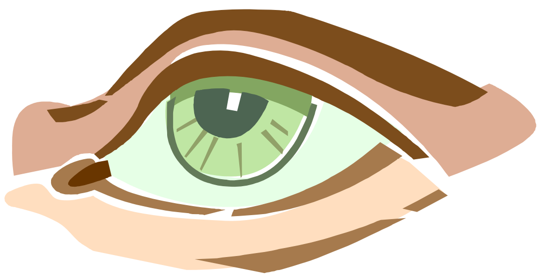
Auge und Phase

Das Auge ist sehr phasenempfindlich (Kurvenform)!

Dafür ist das Auge weniger amplitudenempfindlich.



Kaum phasenabhängig



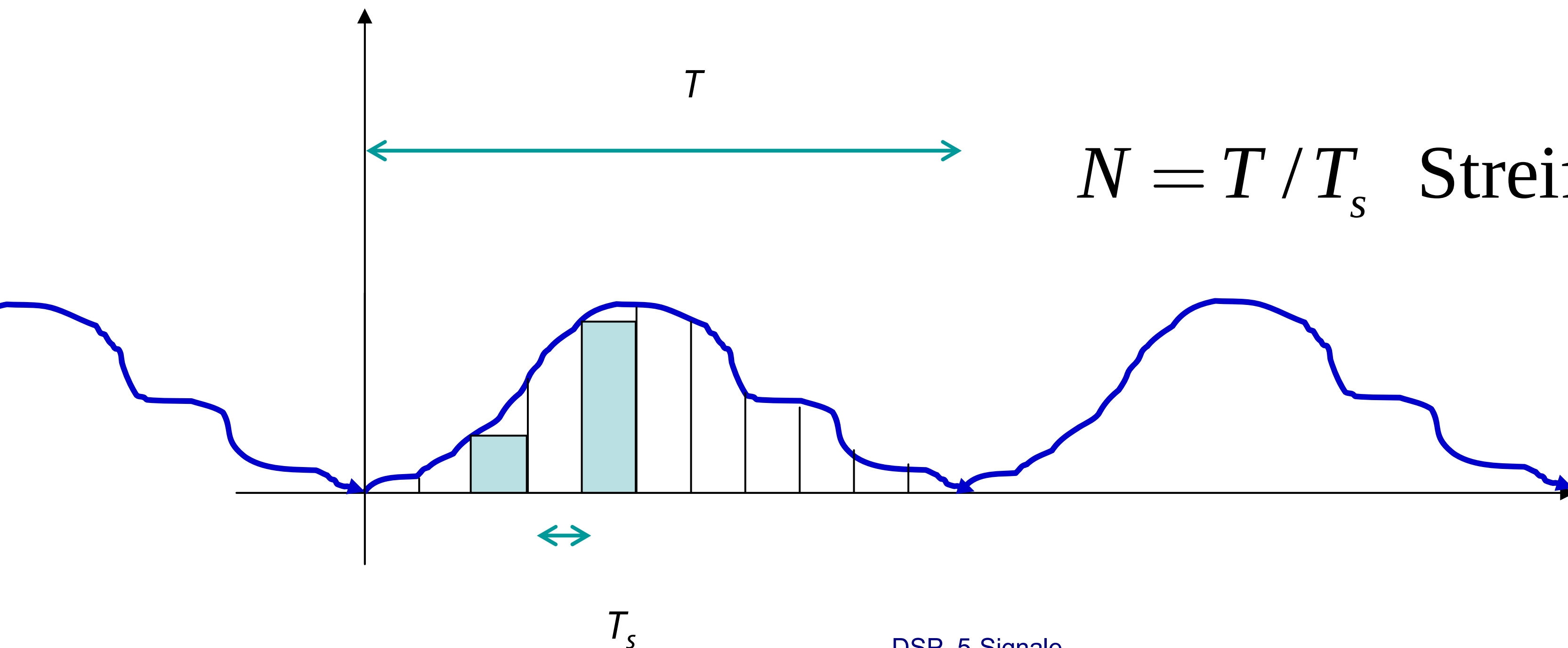
»Phasenabhängig«
Kurvenform !

Beispiele für die analytische Berechnung der Fourierkoeffizienten im Text zu Kapitel Signale.

Es geht nicht immer analytisch…

$$D_k = \frac{1}{T}\int_T s(t)e^{-jk\omega_0 t}dt, \qquad k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

$$N = T / T_s \ \ \text{Streifen}$$



$$t \longrightarrow nT_s$$

$$D_k = \frac{1}{T}\int_T s(t)e^{-jk\omega_0 t}dt, \qquad k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

$$= \lim_{T_s \to 0}\frac{1}{T}\sum_{n=0}^{N-1} s(nT_s)e^{-jk\omega_0 nT_s}T_s$$

$$\Omega_0 = \omega_0 T_s \qquad\qquad N = T/T_s$$

Vernachlässigen wir den Fehler der numerischen Integration erhalten wir

$$D_k = \cancel{\lim_{T_s \to 0}} \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} s(nT_s) e^{-jk\Omega_0 n}$$

Diskrete Fourier Transformation (DFT)

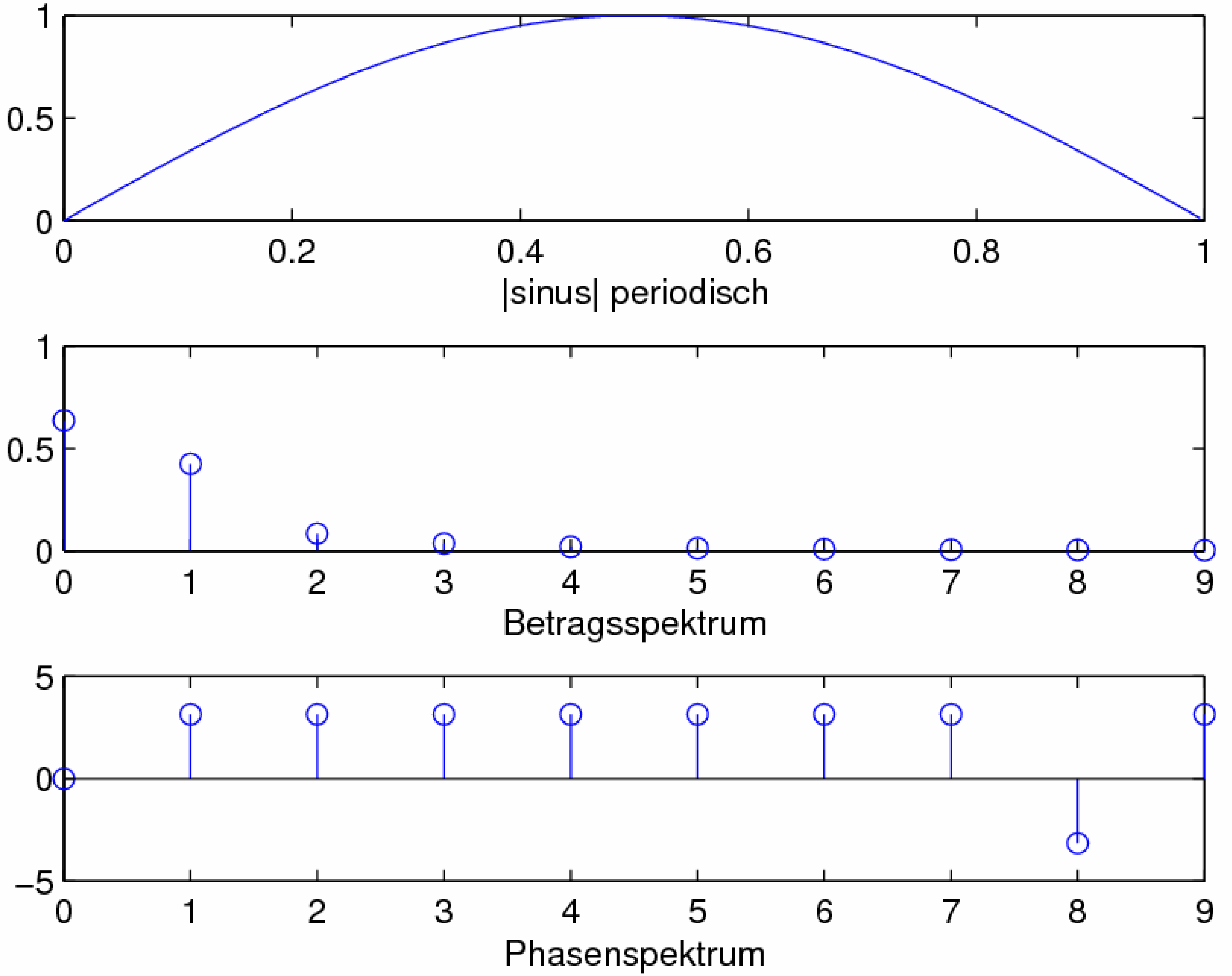
```
% Fourierkoeffizienten |sinus| mit FFT
N = 256;
t = linspace (0,1,(N+1));
t = t([1:N]);  % letzter Punkt entfernt wegen Periode
s = abs(sin(pi*t));
subplot (311),  plot(t,s)
```

```
d = fft(s)/N;  % Berechnung des komplexen Spektrums
dMag = abs(d); dPhase=angle(d);  % Betrag, Phase
```

```
M = 10;  % Fourierkoeffizienten von M Spektrallinien
d0 = dMag(1); dM=2*dMag(2:M);
                 % Umrechnen auf einseitiges Spektrum
cMag = [d0,dM]; cPhase=dPhase(1:M);
```

```
subplot (312), stem((0:(M-1)),cMag), xlabel 'Betragsspektrum'
subplot (313), stem((0:(M-1)),cPhase), xlabel 'Phasenspektrum'
```

$T = \pi \qquad \omega = 2\pi / T = 2)$



$$\boxed{T = \pi \qquad\qquad \omega = 2\pi / T = 2}$$

$$s(t) = \frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi}\left(\frac{\cos 2t}{1.3} + \frac{\cos 4t}{3.5} + \frac{\cos 6t}{5.7} + \ldots\right) =$$
$$= 0.6366 - 0.4244\cos 2t - 0.0849\cos 4t - 0.0364\cos 6t + \ldots$$

$\left|\sin \omega t\right|$ ist gerade Funktion $\Rightarrow$ nur Kosinus-Terme!

Betrag (FFT)	**Phase (FFT)**	**Betrag (Reihe)**	**Phase (Reihe)**
0.6366	0	0.6366	0
0.4244	3.1416	0.4244	π
0.0849	3.1416	0.0849	π
0.0364	3.1416	0.0364	π
0.0202	3.1416	0.0202	π
0.0129	3.1416	0.0129	π
0.0089	3.1416	0.0089	π
0.0065	3.1416	0.0065	π
0.0050	-3.1416	0.0050	$\pi \equiv -\pi$
0.0040	3.1416	**0.0039**	π

Dirichlet'sche Bedingungen

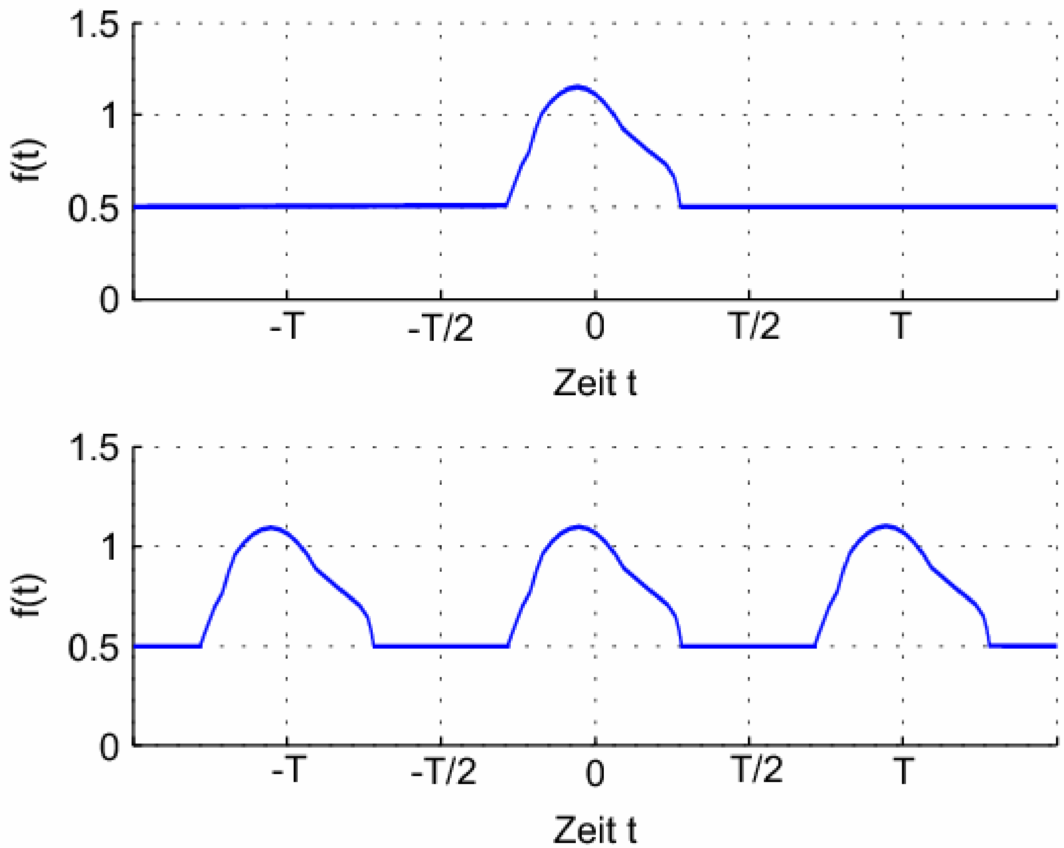
- Nicht jede periodische Funktion lässt sich in eine Fourierreihe zerlegen.
- Es leuchtet ein, dass für die Konvergenz einer Fouriereihe die Amplituden der Teilschwingungen endlich sein müssen. Das ist immer dann gegeben, wenn die periodische Funktion *s*(*t*) absolut über eine Periode integrierbar ist, wenn also gilt:

$$\int_T |s(t)| dt < \infty$$

- Diese Bedingung ist jedoch nicht hinreichend.
  - ***s*(*t*) darf darüber hinaus nur eine endliche Zahl von Maxima und Minima innerhalb einer Periode haben und**
  - **darf nur eine endliche Zahl von endlichen Diskontinuitäten in einer Periode aufweisen.**
- Diese Bedingungen sind für alle technischen Signale erfüllt.

Nichtperiodische Signale

Periodische Fortsetzung



Wir machen das nichtperiodische Signal periodisch (um die Fourierreihe verwenden zu können) und lassen die Periodendauer gegen ∞ gehen.

Fouriertransformation

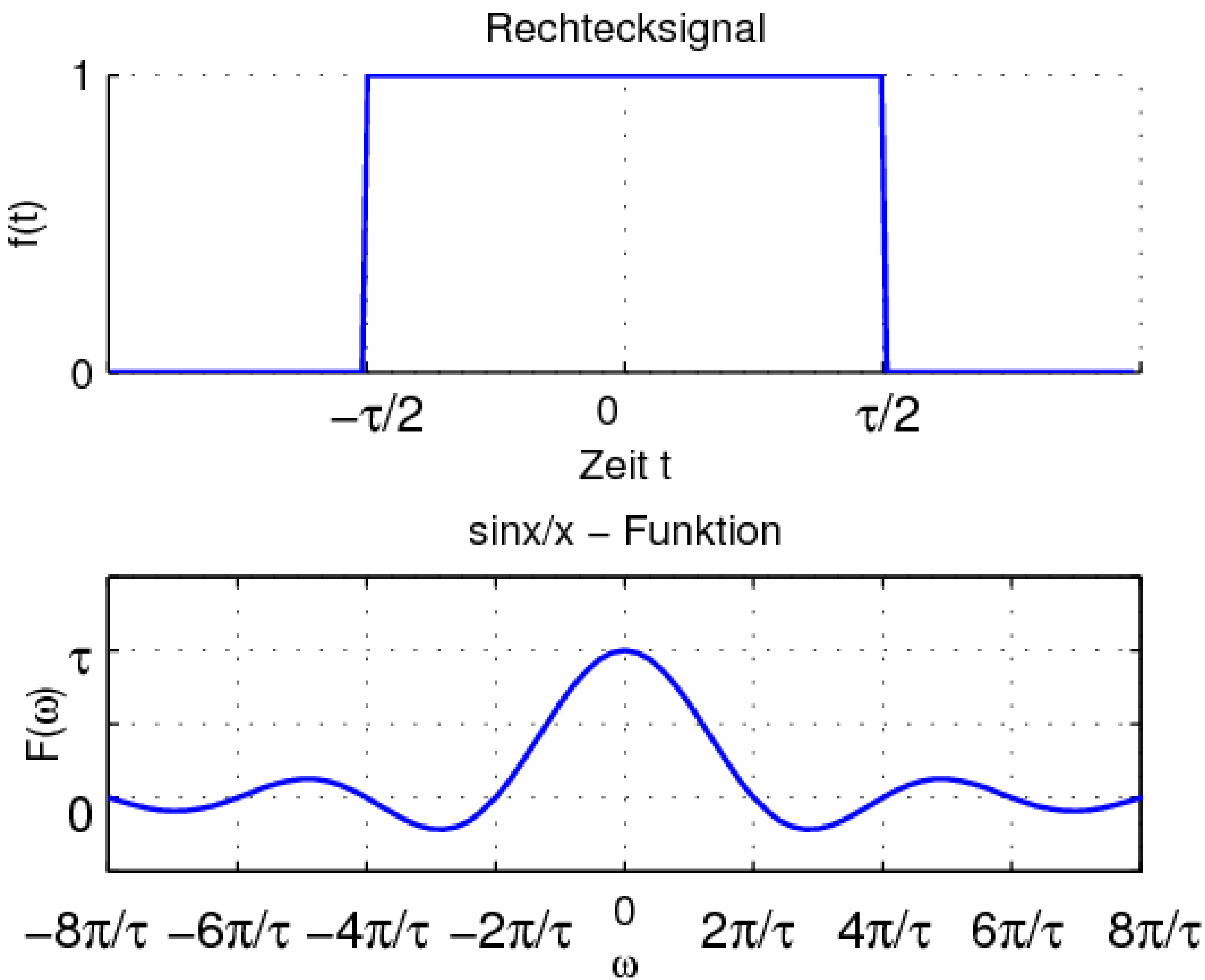
$$f(t) \quad \Leftrightarrow \quad F(\omega)$$

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt$$

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{j\omega t} d\omega$$

- Bei der Fouriertransformation (nichtperiodische Signale) treten kontinuierliche Spektren (unendlich viele Spektrallinien) auf.

- Bei der Fourierreihe (periodische Signale) treten Linienspektren auf.

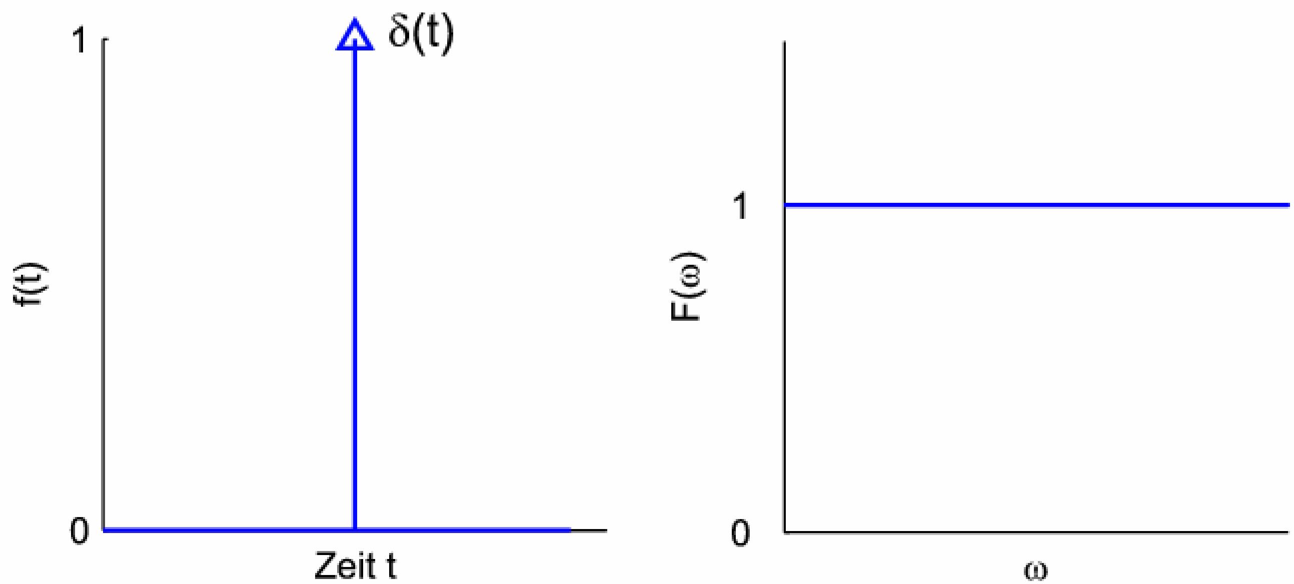

Rechtecksignal
1
0
f(t)
−τ/2
0
τ/2
Zeit t
sinx/x – Funktion
F(ω)
τ
0
−8π/τ −6π/τ −4π/τ −2π/τ
0
ω
2π/τ 4π/τ 6π/τ 8π/τ

$$F(\omega) = \int_{-\tau/2}^{\tau/2} e^{-j\omega t} dt = -\frac{1}{j\omega}\left(e^{-j\omega\tau/2} - e^{j\omega\tau/2}\right) = \frac{2\sin\left(\frac{\omega\tau}{2}\right)}{\omega}$$

$$= \tau \frac{\sin\left(\frac{\omega\tau}{2}\right)}{\left(\frac{\omega\tau}{2}\right)} = \tau \operatorname{sinc}\left(\frac{\omega\tau}{2}\right)$$

Spektrum der Impulsfunktion

$$F\{\delta(t)\} = F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) e^{-j\omega t} dt = 1$$



Der Impuls enthält alle Frequenzen mit gleicher Amplitude und ist daher ein sehr gutes (theoretisches) Testsignal für Systeme.

Fourier „sehen"

FR: $$f(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \boxed{D_k} \; e^{jk\omega_0 t} \qquad D_k = \frac{1}{T_0}\int_0^{T_0} \boxed{f(t)} \; e^{-jk\omega_0 t} dt$$

FT: $$f(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \boxed{F(\omega)} \; e^{j\omega t} d\omega \qquad F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \boxed{f(t)} \; e^{-j\omega t} dt$$

$$e^{jk\omega_0 t}, \; e^{j\omega t}$$

„+" Zeiger

$$e^{-jk\omega_0 t}, \; e^{-j\omega t}$$

„-" Zeiger „angehalten"

- D_k bzw. $F(\omega)$ Amplitude
- **Summe** bei diskreten Spektrallinien $k\omega_0$
- **Integral** bei Spektraldichte ω

Zusammenfassung (1)

Periodische Signale können durch Überlagerung von sinusförmigen Funktionen dargestellt werden.

Wir können ein Signal als Zeitfunktion oder als Summe von sinusförmigen Komponenten betrachten und gelangen dadurch zur Darstellung im Zeitbereich und im Frequenzbereich.

Periodische Signale sind immer aus ganzzahligen Vielfachen der Grundschwingung aufgebaut, im Frequenzbereich führt das zu **Linienspektren**.

Signale die aus sinusförmigen Schwingungen zusammengesetzt sind, deren Frequenzverhältnis nicht rational ist, sind keine periodischen Signale, haben aber ebenfalls ein Linienspektrum.

Zusammenfassung (2)

Die Breite des Spektrums hängt vom Signal ab, Linienspektren können endliche Breite haben oder können sich von -∞ bis ∞ erstrecken.

Signale sind in der Regel nicht periodisch, sondern haben eine endliche Dauer. Für die Berechnung der Spektralkomponenten aperiodischer Signale wird die Fourierreihe zur Fouriertransformation.

Aus dem Linienspektrum der peridiodischen Signale wird wird das konntinuierliche Spektrum der aperiodischen Signale. Das Spektrum eines aperiodschen Signals erstreckt sich immer von -∞ bis ∞.

Zusammenfassung (3)

$$s(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} D_k e^{jk\omega_0 t} \quad \Leftrightarrow \quad D_k = \frac{1}{T}\int_T s(t)\, \underbrace{e^{-jk\omega_0 t}}_{\text{"Anhalten"}}\, dt$$

$$D_k = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} s(nT_s) e^{-jk\Omega_0 n}$$

$$f(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{j\omega t} d\omega \quad \Leftrightarrow \quad F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\, \underbrace{e^{-j\omega t}}_{\text{"Anhalten"}}\, dt$$

$$c_k = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} s(nT_s) e^{-jk\Omega_0 n}$$

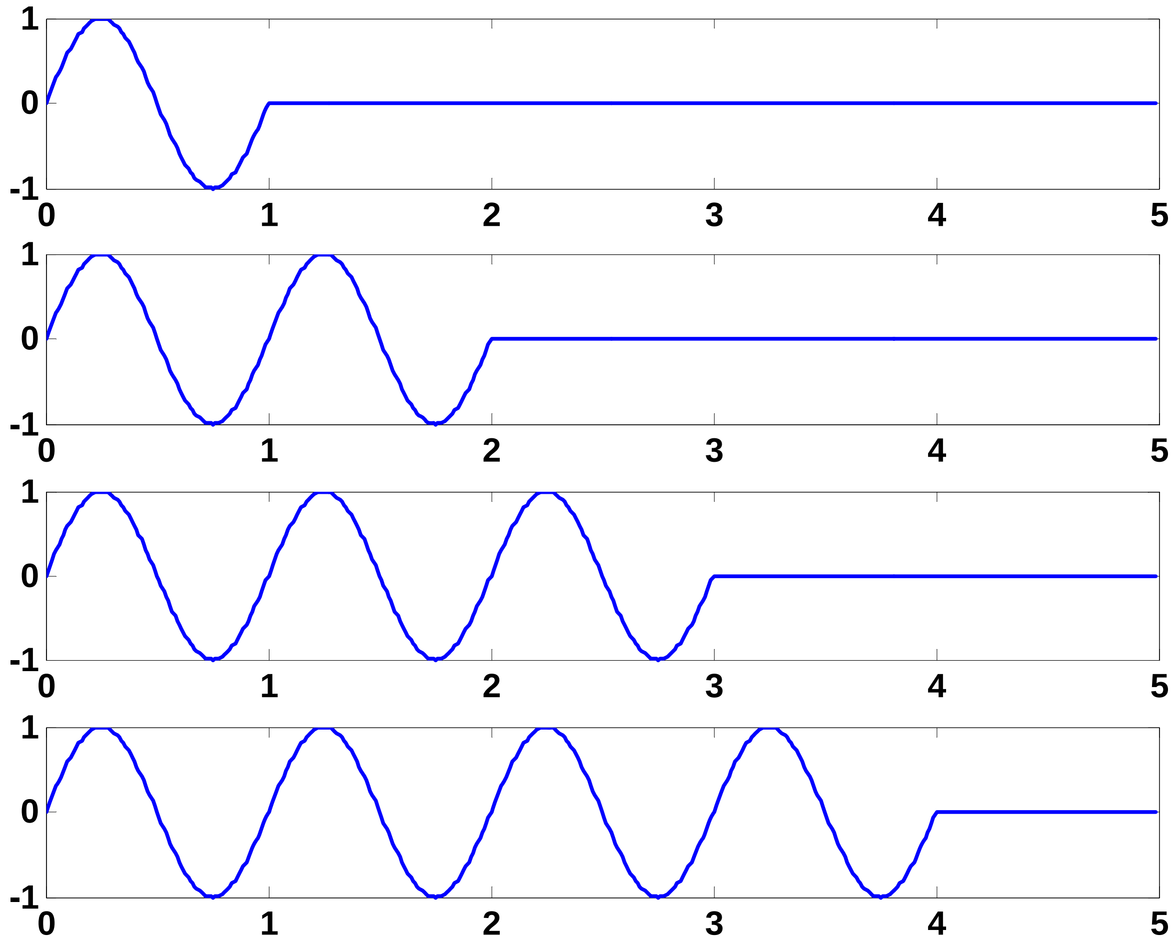
$D_k, F(\omega)$ Linien- bzw. kontinuierliches Spektrum

$k\omega_0, \omega$ Spektralkomponente

Diskrete Spektrallinien werden summiert,

kontinuierliche Spektrallinien werden integriert.

Übungsbeispiel



Berechnen Sie die Spektren analytisch und numerisch.