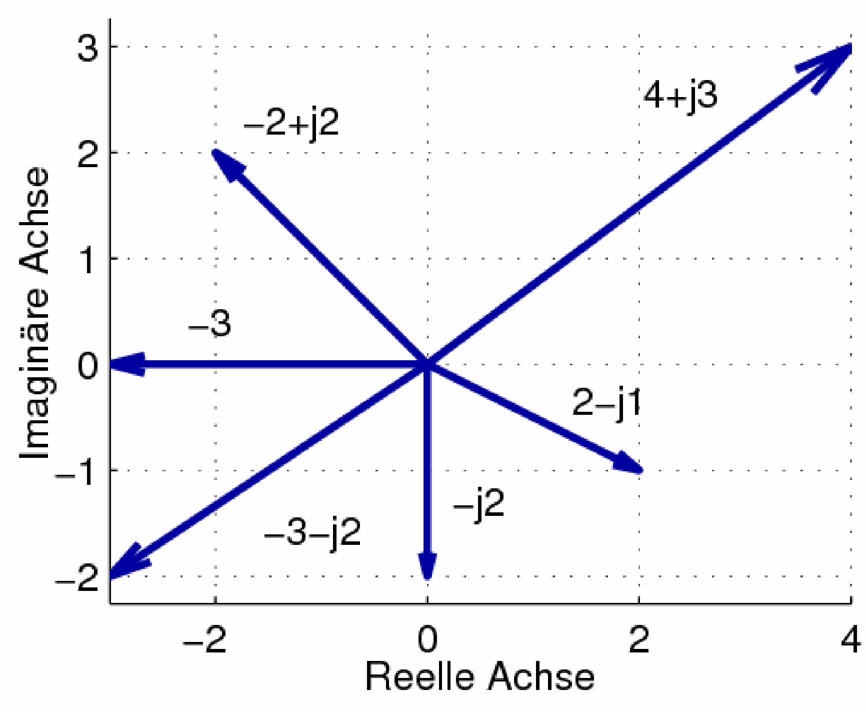
Komplexe Zahlen

Real- und Imaginärteil

$$z(x,y) = x + jy = \mathrm{Re}\{z\} + j\,\mathrm{Im}\{z\}$$

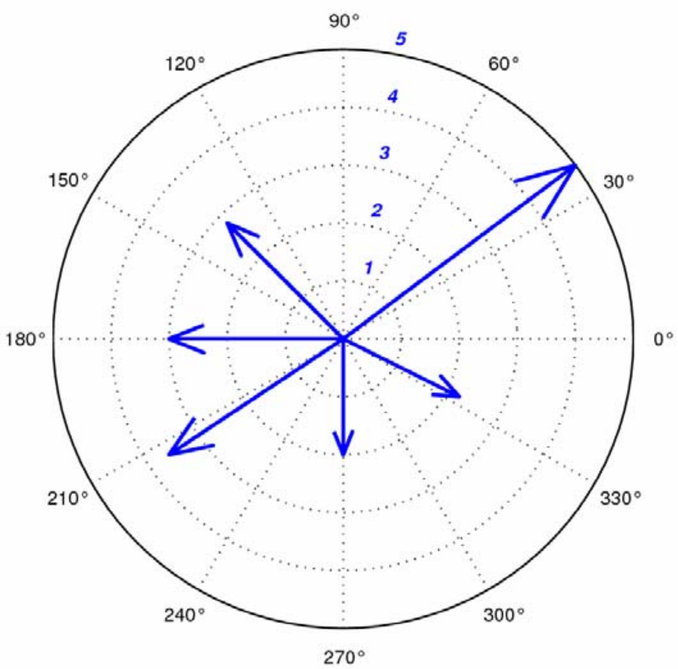


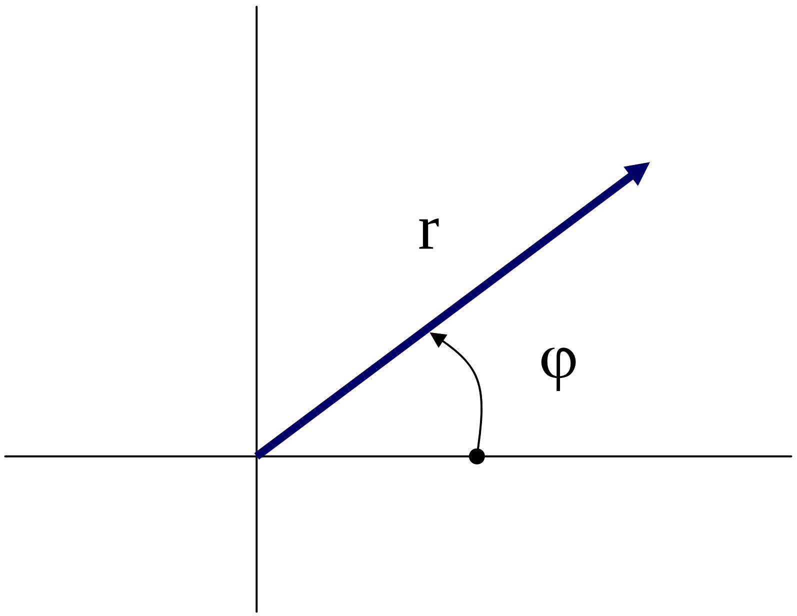
Zeiger $\neq$ Vektor

- Vektor: gerichtete Größe
  Kraft, Beschleunigung, Impuls
- Zeiger: Darstellung einer komplexen Zahl
- Rechenregeln nur teilweise gleich (z.B. Addition) nicht bei der Multiplikation (z.B. äußeres und inneres Produkt)

Betrag und Winkel (Phase)

$$\boxed{z = r\angle\varphi}$$





`compass(z)`

Winkel: Rechnung ⇔ Vorstellung

- Rechnen im Bogenmaß
- Vorstellung im Gradmaß

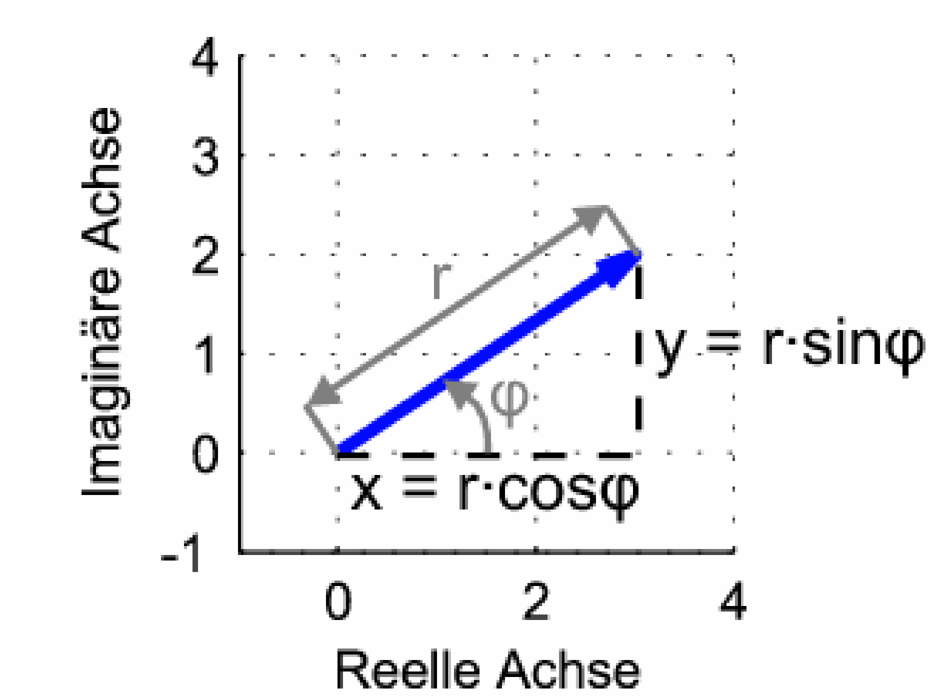
$$360° = 2\pi$$

$$\text{Darstellung: } \alpha \ [\text{rad}] = 45 \ [°] \cdot \frac{\pi}{180}$$

Kartesische ⇔ polare Darstellung

$$x = r\cos\varphi \quad y = r\sin\varphi \quad z = r\cos\varphi + j\left(r\sin\varphi\right)$$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} \quad \tan\varphi = \frac{y}{x} = \frac{\text{Imaginärteil}}{\text{Realteil}} \quad \varphi = \arctan\frac{y}{x}$$



☺ kartesisch	☺ polar
• Addition	• Multiplikation
• Subtraktion	• Division
• konjugiert	• Potenz
	• Wurzel
	• konjugiert

Achtung Phase (1)

Grad-/Bogenmaß: $\sin(\alpha° \cdot \pi / 180)$

Realteil 0: $\varphi = \arctan \frac{\text{Imaginärteil}}{\text{Realteil}} \quad \Rightarrow$ Division duch Null!

arctan nur für $-90° \leq \varphi \leq 90°$ definiert

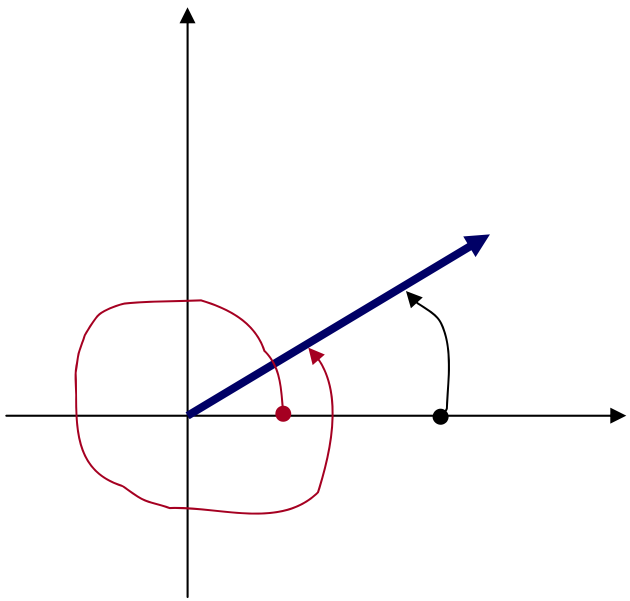
$$\varphi = \arctan \tfrac{1}{1} = 0.7854\left[rad\right] = 45°$$

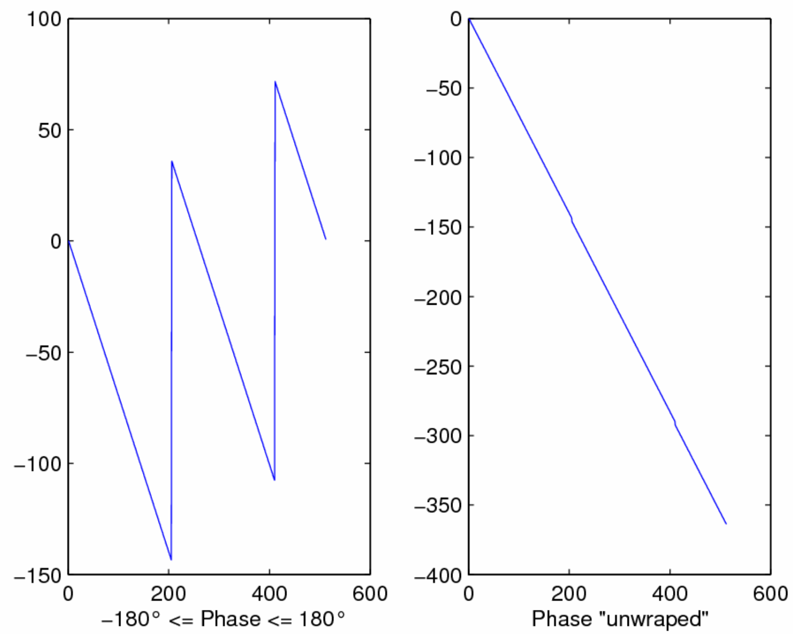
$$\varphi = \arctan(\tfrac{-1}{-1}) = \cancel{0.7854\left[rad\right] = 45°} = -135°$$

Achtung Phase (2)

Phase von $0 \le \varphi \le 2\pi$ definiert

physikalisch aber oft: $\varphi + n \cdot 2\pi = \varphi$






```
unwrap(phase)
```

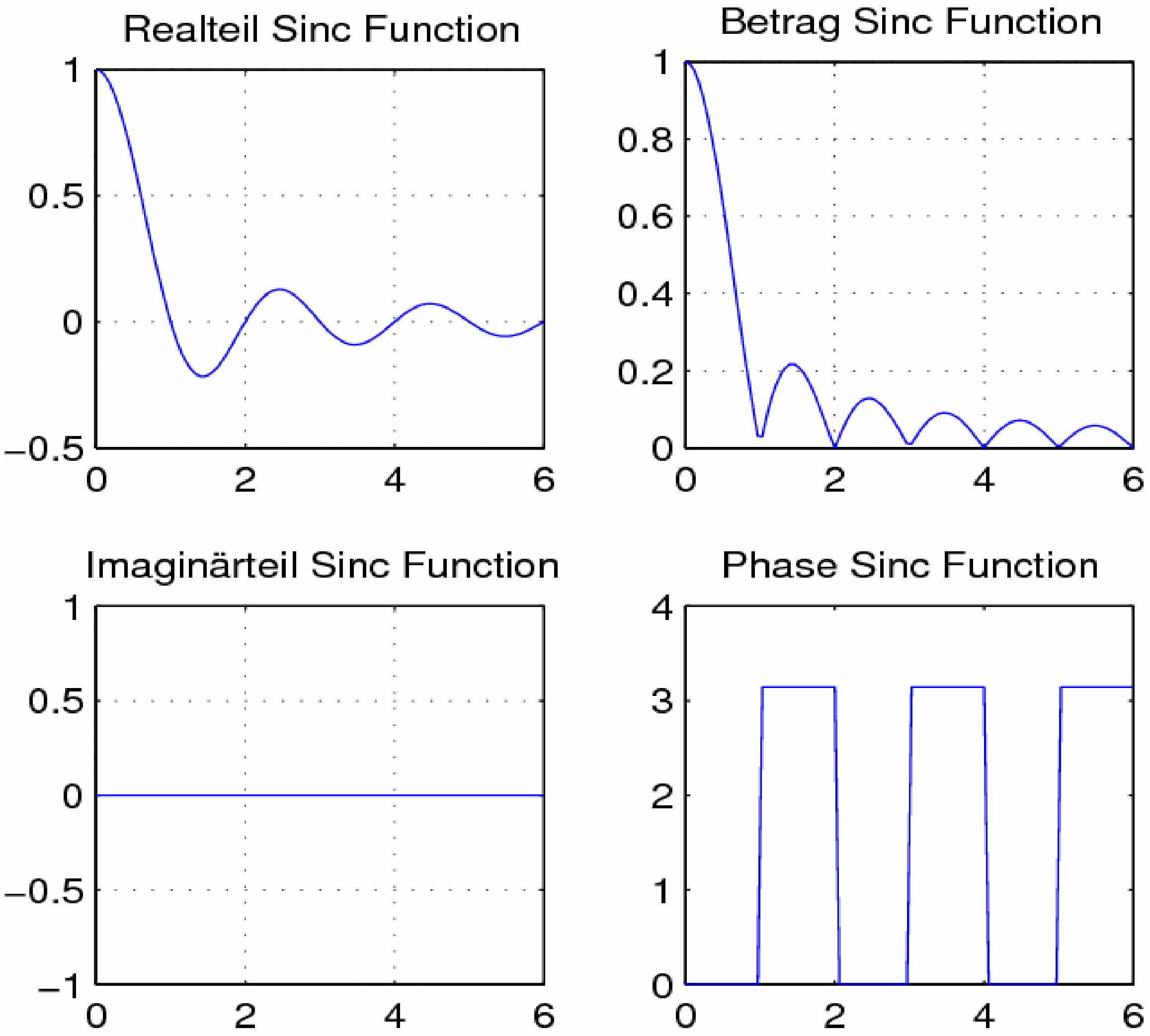
Achtung Phase (3)

$-\pi$ und π stellt dieselbe Phase dar.

Durch Rundungsfehler kann es zu Phasensprüngen $-\pi \rightarrow \pi$ kommen.

Wenn die Amplitude Null (oder sehr klein) ist, hat die Phase keine Bedeutung!

Der Betrag ist positiv!



Matlab (1)

MATLAB kennt komplexe Zahlen:
`3 + 4i oder 3 + 4j`

Achtung bei der Verwendung von i oder j als Variable:

`i=3; i = 4+3*i → 13`

aber **`4+3i → 4.00 + 3.00i`**

Wiederherstellen von i als imaginäre Einheit:

`i = sqrt(-1)`

Schreibweise 4 + 3*1i verwenden.

Matlab (2)

real(z)	Realteil von z	real(3-4i)	→ 3
imag(z)	Imaginärteil von z	imag(3-4i)	→ -4
abs(z)	Betrag von z	abs(3-4i)	→ 5
angle(z)	Winkel von z	angle(3-4i)	→ -0.9273
conj(z)	Konjugierte von z	conj(3-4i)	→ 3+4i

angle(z) von -180° bis 180° definiert.

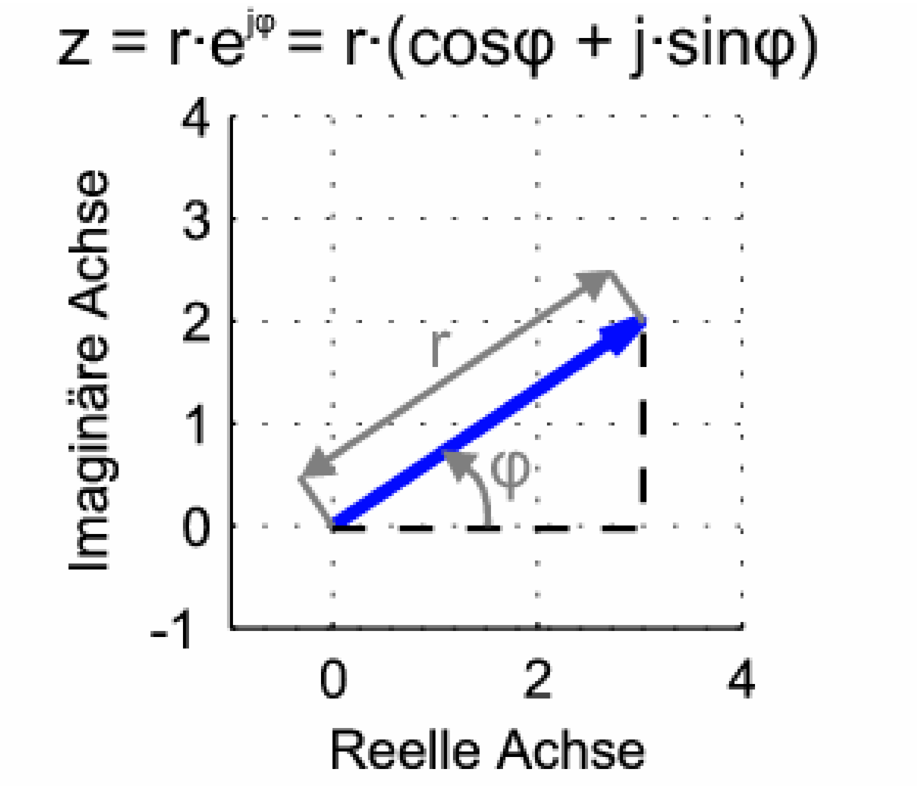
Achtung bei transpose z' :

z.' ist das nichtkonjugierte transpose

z' ist das konjugierte transpose

Euler (1)

$$\boxed{z = r\angle\varphi} \quad \Rightarrow \quad \boxed{e^{j\varphi} = \cos\varphi + j\sin\varphi}$$



Euler (2)

$$e^{x} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots$$

$$e^{j\varphi} = 1 + j\varphi - \frac{\varphi^2}{2!} - j\frac{\varphi^3}{3!} + \frac{\varphi^4}{4!} + j\frac{\varphi 5}{5!} + \cdots = \underbrace{1 - \frac{\varphi^2}{2!} + \frac{\varphi^4}{4!} - \cdots}_{\cos\varphi} + \underbrace{j(\varphi - \frac{\varphi^3}{3!} + \frac{\varphi 5}{5!} - \cdots)}_{+\,j\sin\varphi}$$

$$\cos\varphi = 1 - \frac{\varphi^2}{2!} + \frac{\varphi^4}{4!} - \cdots \qquad \sin\varphi = \varphi - \frac{\varphi^3}{3!} + \frac{\varphi 5}{5!} - \cdots$$

Beweis algebraisch!

Algebra

Geometrie

Euler (3)

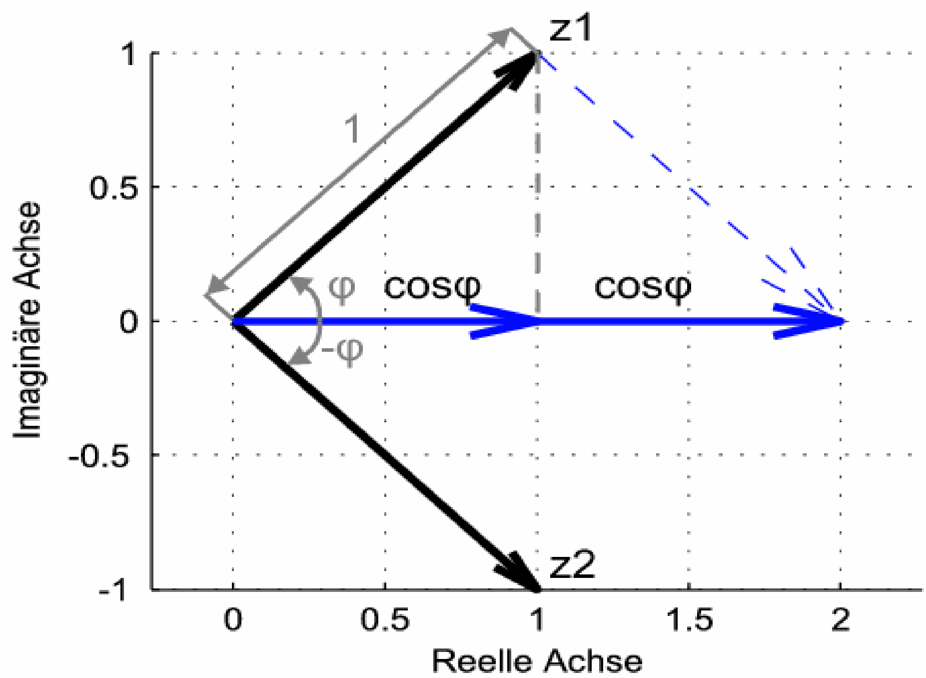
$$e^{j\varphi} = \cos\varphi + j\sin\varphi$$

$$e^{-j\varphi} = \cos\varphi - j\sin\varphi$$

$$e^{j\varphi} + e^{-j\varphi} = 2\cos\varphi$$

$$\Rightarrow$$

$$\boxed{\cos\varphi = \frac{e^{j\varphi} + e^{-j\varphi}}{2} \qquad \sin\varphi = \frac{e^{j\varphi} - e^{-j\varphi}}{2j}}$$



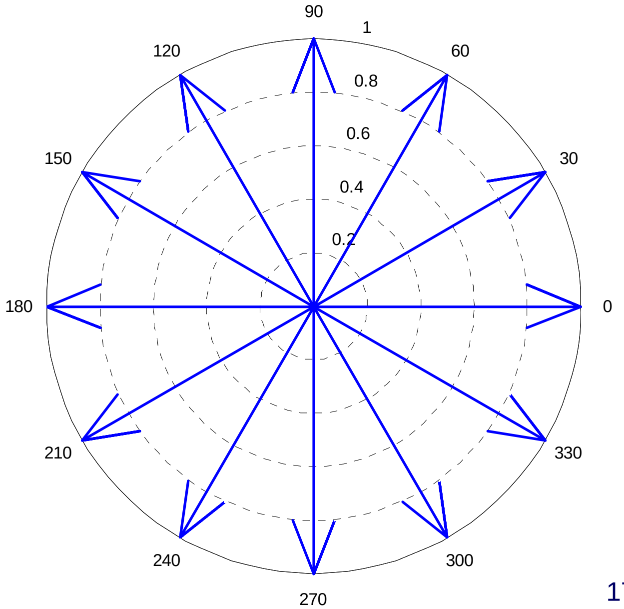
Matlab (3)

MATLAB gibt immer in kartesischer Darstellung aus, eingeben kann man aber auch in Euler‘scher Form.

3*exp(i*45*pi/180) ➔ 2.1213 + 2.1213i

3.6056*exp(2.1588i)*10.8167*exp(-0.9828i) ➔ 15.00 +36.00i

compass(exp((i*30*pi/180)*(0:11)))

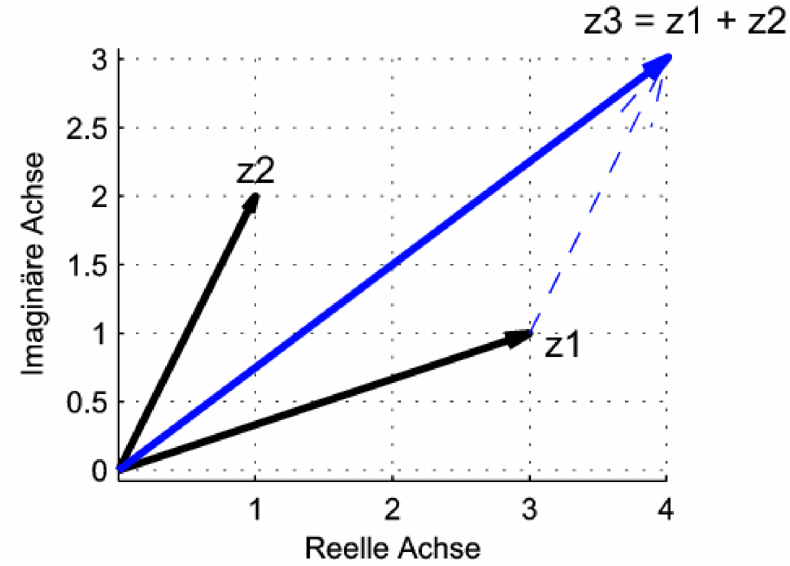


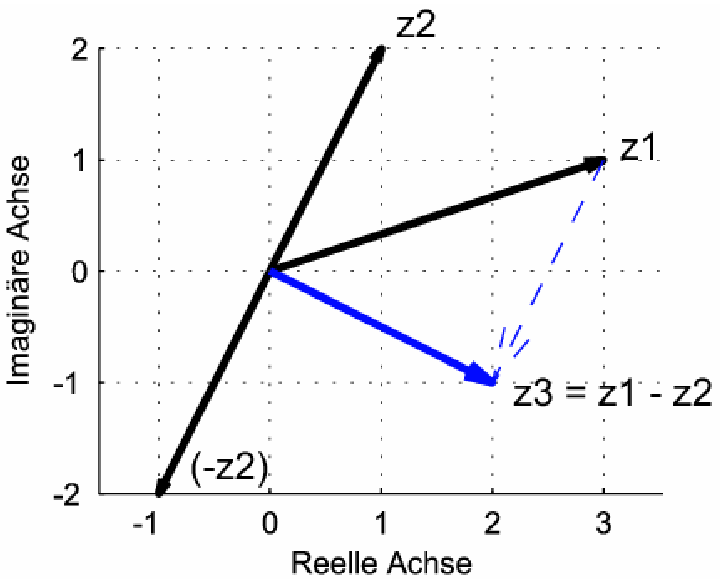
abs(3*exp(i*45*pi/180)) ➔3

(180/pi)*angle (3*exp(i*45*pi/180))

➔ 45.00

Rechnen mit komplexen Zahlen (1)





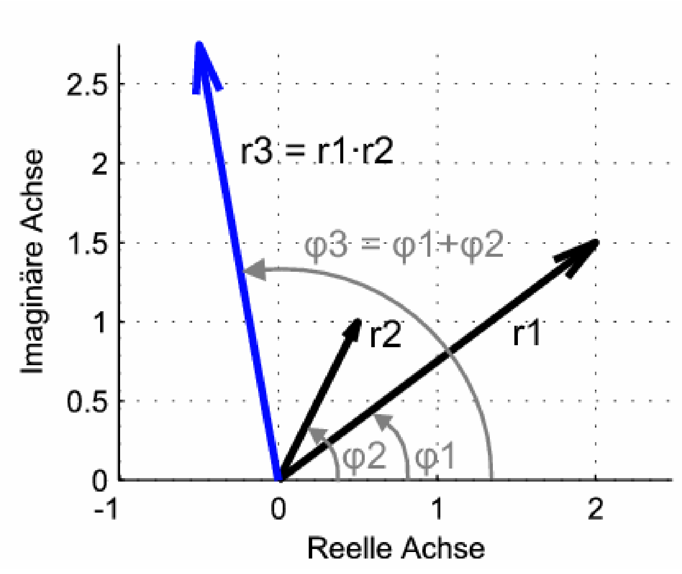
Addition

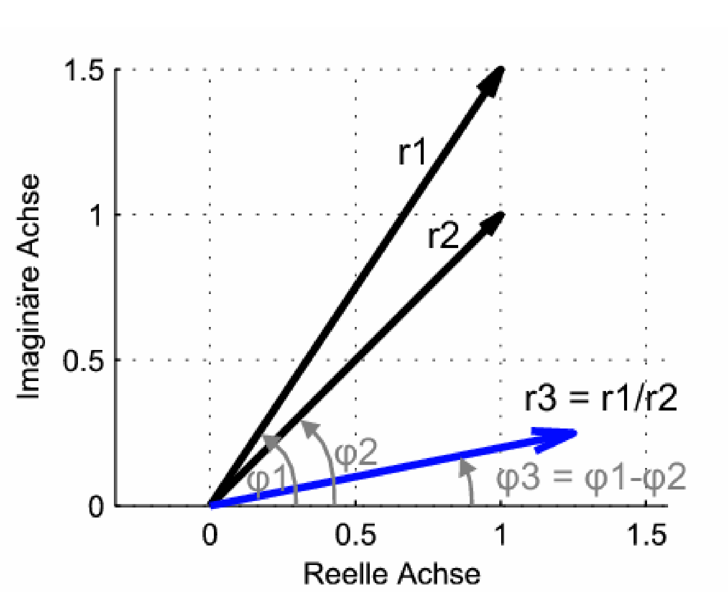
$$z_1 + z_2 = (x_1 + jy_1) + (x_2 + jy_2)$$
$$= (x_1 + x_2) + j(y_1 + y_2)$$

Subtraktion

$$z_1 - z_2 = (x_1 + jy_1) - (x_2 + jy_2)$$
$$= (x_1 - x_2) + j(y_1 - y_2)$$

Rechnen mit komplexen Zahlen (2)





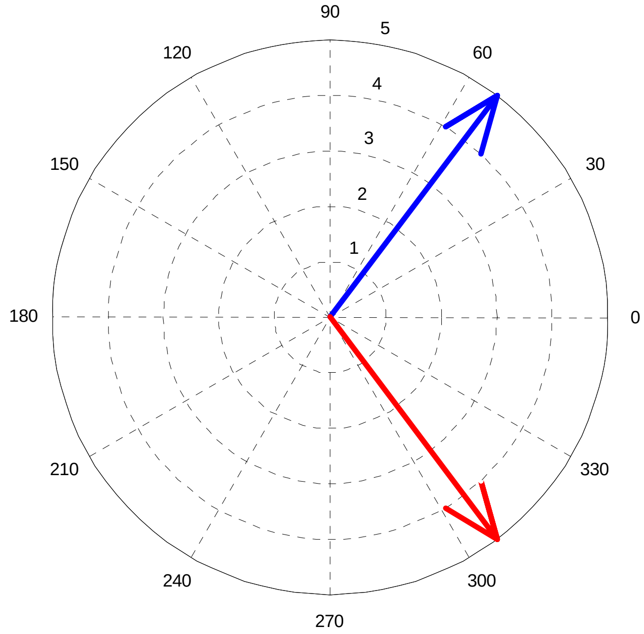
Multiplikation

$$z_1 \times z_2 = r_1 e^{j\varphi_1} \times r_2 e^{j\varphi_2}$$
$$= r_1 r_2 e^{j(\varphi_1+\varphi_2)}$$

Division

$$z_1 \div z_2 = \frac{r_1 e^{j\varphi_1}}{r_2 e^{j\varphi_2}}$$
$$= \frac{r_1}{r_2} e^{j(\varphi_1-\varphi_2)}$$

Rechnen mit komplexen Zahlen (3)

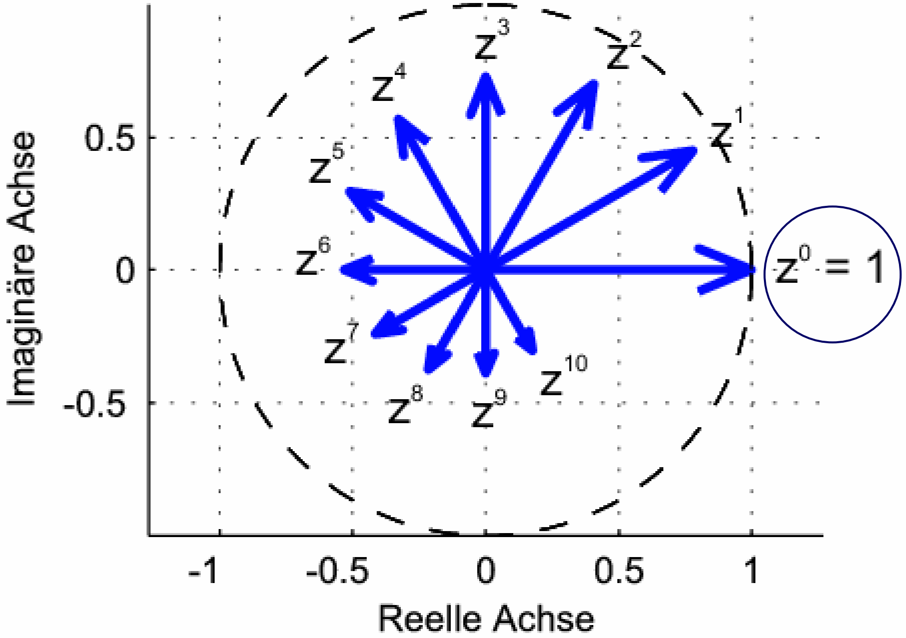


Konjugiert komplex bzw. transpose

$$z_1^* = z_1' = (x_1 + jy_1)^* = (x_1 - jy_1)$$

$$z_1^* = \left(r_1 e^{j\varphi_1}\right)^* = r_1 e^{-j\varphi_1}$$

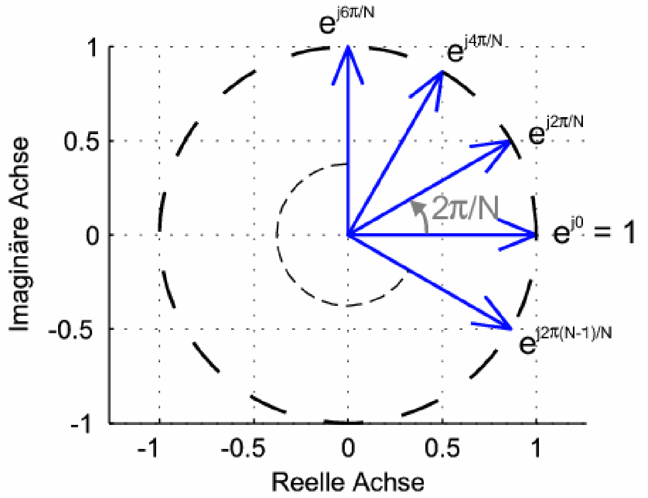
Rechnen mit komplexen Zahlen (4)

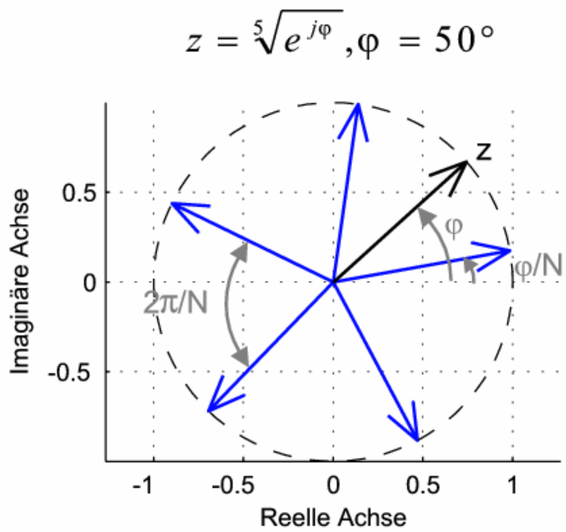


Potenz

$$\boxed{z^N = \left(re^{j\varphi}\right)^N = r^N e^{jN\varphi}}$$

Rechnen mit komplexen Zahlen (4)





Wurzel

$$\sqrt[N]{1} = e^{\frac{j2\pi n}{N}}$$

$$n = 0,1,2,\ldots,N-1$$

$$z = \sqrt[N]{re^{j\varphi}} = \sqrt[N]{r}e^{j\left(\frac{\varphi}{N}+\frac{2\pi n}{N}\right)}$$

$$n = 0,1,2,\ldots,N-1$$