

# Fouriertransformationen

# Fourierreihe

periodisch

kontinuierlich ( $t$ ), diskret ( $\omega$ )

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} X_k e^{jk\omega_0 t} \quad \Leftrightarrow \quad X_k = \frac{1}{T} \int_T x(t) \underbrace{e^{-jk\omega_0 t}}_{\text{"Anhalten"}} dt$$

$k = -\infty, \dots, \infty$

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T_0} \quad T_0 \dots \text{Periodendauer}$$

# Fouriertransformation

aperiodisch

kontinuierlich ( $t$ ), kontinuierlich ( $\omega$ )

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(\omega) e^{j\omega t} d\omega \Leftrightarrow X(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \underbrace{e^{-j\omega t}}_{\text{"Anhalten"}} dt$$

$\omega \in (-\infty, +\infty)$

# Discrete Time Fouriertransformation (DTFT)

aperiodisch

diskret  $[n]$ , kontinuierlich  $(\omega)$

$$x[n] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(\hat{\omega}) e^{j\hat{\omega}n} d\hat{\omega} \quad \Leftrightarrow \quad X(\hat{\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] e^{-j\hat{\omega}n}$$
$$\omega \in (-\infty, +\infty)$$

$$\hat{\omega} = \omega T_s \quad T_s \dots \text{ Abtastzeit}$$

# Diskrete Fouriertransformation (DFT)

periodisch

diskret  $[n]$ , diskret ( $\omega$  bzw.  $k$ )

$$x[n] = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X[k] e^{j(2\pi k/N)n} \quad n = 0, 1, 2, \dots, N-1$$

$$X[k] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] e^{-j(2\pi n/N)k} \quad k = 0, 1, 2, \dots, N-1$$

---

$$\omega_k = 2\pi \frac{k}{N} f_s = \frac{2\pi k}{NT}; \quad t_n = nT$$

$$x[n] = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X[k] e^{j\omega_k t_n} \quad \Leftrightarrow \quad X[k] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] e^{-j\omega_k t_n}$$

$$\sum_{k=0}^{N-1}$$

$$x[n] = \frac{1}{N} X[0]e^{j(2\pi 0/N)n} \quad n = 0, 1, 2, \dots, N-1$$

$$+ \frac{1}{N} X[1]e^{j(2\pi 1/N)n}$$

$$+ \frac{1}{N} X[2]e^{j(2\pi 2/N)n}$$

$$\vdots$$

$$+ \frac{1}{N} X[N-1]e^{j(2\pi(N-1)/N)n}$$

$$x[n] = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X[k]e^{j(2\pi k/N)n}$$

$$\sum_{n=0}^{N-1}$$

$$X[k] = x[0]e^{-j(2\pi 0/N)k} \quad k = 0, 1, 2, \dots, N-1$$

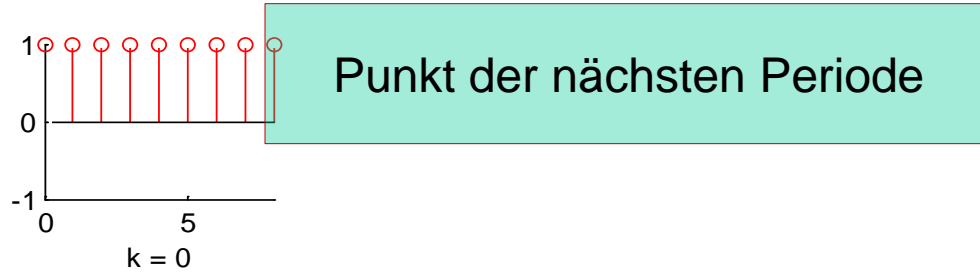
$$+ x[1]e^{-j(2\pi 1/N)k}$$

$$+ x[2]e^{-j(2\pi 2/N)k}$$

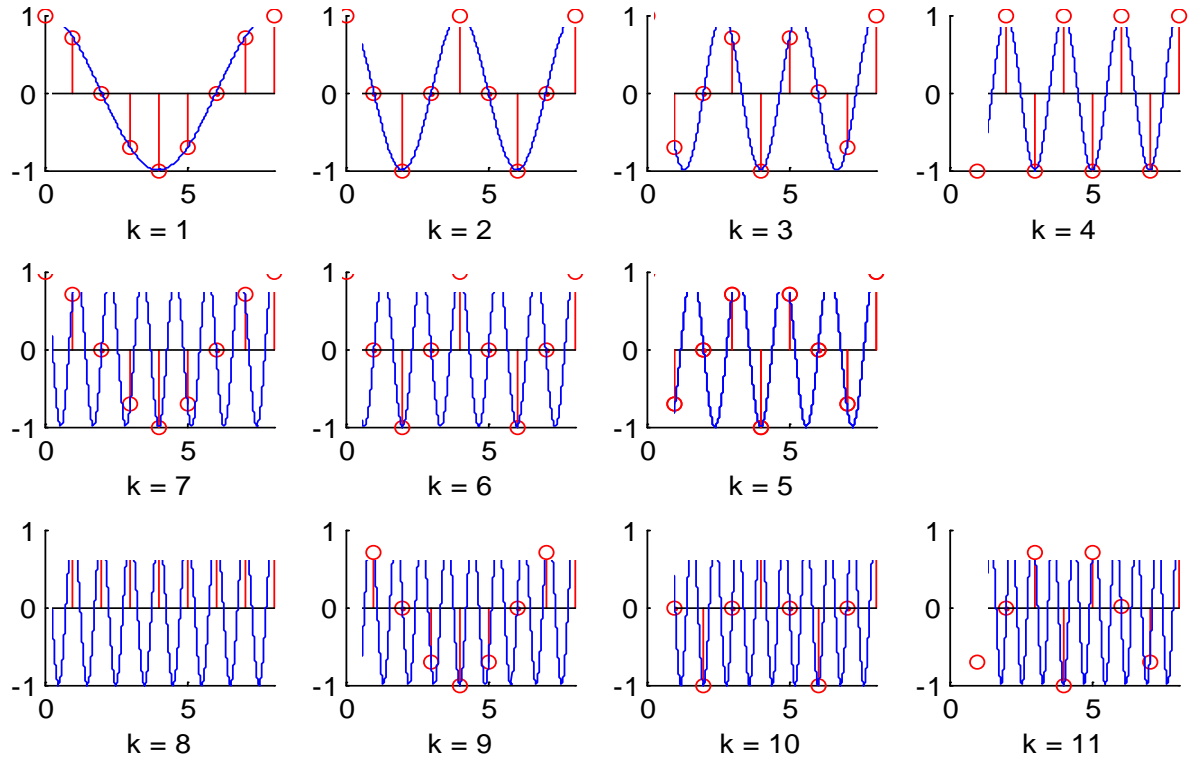
$$\vdots$$

$$+ x[N-1]e^{-j(2\pi(N-1)/N)k}$$

$$x[n] = \mathbf{Re} \left( e^{j \frac{2\pi k}{N} n} \right), \quad k = 0, 1, 2, \dots, N - 1$$



**N = 8**



$1 \leftrightarrow 7$   
 $2 \leftrightarrow 6$   
 $3 \leftrightarrow 5$

$8 \leftrightarrow 0$   
 $9 \leftrightarrow 1$   
 $10 \leftrightarrow 2$   
 $11 \leftrightarrow 3$

DSP

$$X[k] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] e^{-j2\pi nk/N} \quad (e^{ja} = \cos \alpha + j \sin \alpha)$$

$$X[k] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] \left[ \cos(2\pi nk/N) - j \sin(2\pi nk/N) \right]$$

$$X[k] = \sum_{n=0}^3 x[n] \left[ \cos(2\pi nk/4) - j \sin(2\pi nk/4) \right]$$

$$\sum_{n=0}^{N-1} \left\{ \begin{aligned} X[0] &= x[0] \cos(2\pi \cdot 0 \cdot 0/4) - jx[0] \sin(2\pi \cdot 0 \cdot 0/4) + \\ &+ x[1] \cos(2\pi \cdot 1 \cdot 0/4) - jx[1] \sin(2\pi \cdot 1 \cdot 0/4) + \\ &+ x[2] \cos(2\pi \cdot 2 \cdot 0/4) - jx[2] \sin(2\pi \cdot 2 \cdot 0/4) + \\ &+ x[3] \cos(2\pi \cdot 3 \cdot 0/4) - jx[3] \sin(2\pi \cdot 3 \cdot 0/4) \end{aligned} \right.$$

$$\sum_{n=0}^{N-1} \left\{ \begin{aligned} X[1] &= x[0] \cos(2\pi \cdot 0 \cdot 1/4) - jx[0] \sin(2\pi \cdot 0 \cdot 1/4) + \\ &+ x[1] \cos(2\pi \cdot 1 \cdot 1/4) - jx[1] \sin(2\pi \cdot 1 \cdot 1/4) + \\ &+ x[2] \cos(2\pi \cdot 2 \cdot 1/4) - jx[2] \sin(2\pi \cdot 2 \cdot 1/4) + \\ &+ x[3] \cos(2\pi \cdot 3 \cdot 1/4) - jx[3] \sin(2\pi \cdot 3 \cdot 1/4) \end{aligned} \right.$$

$$\sum_{n=0}^{N-1} \left\{ \begin{aligned} X[2] &= x[0] \cos(2\pi \cdot 0 \cdot 2/4) - jx[0] \sin(2\pi \cdot 0 \cdot 2/4) + \\ &+ x[1] \cos(2\pi \cdot 1 \cdot 2/4) - jx[1] \sin(2\pi \cdot 1 \cdot 2/4) + \\ &+ x[2] \cos(2\pi \cdot 2 \cdot 2/4) - jx[2] \sin(2\pi \cdot 2 \cdot 2/4) + \\ &+ x[3] \cos(2\pi \cdot 3 \cdot 2/4) - jx[3] \sin(2\pi \cdot 3 \cdot 2/4) \end{aligned} \right.$$

$$\sum_{n=0}^{N-1} \left\{ \begin{aligned} X[3] &= x[0] \cos(2\pi \cdot 0 \cdot 3/4) - jx[0] \sin(2\pi \cdot 0 \cdot 3/4) + \\ &+ x[1] \cos(2\pi \cdot 1 \cdot 3/4) - jx[1] \sin(2\pi \cdot 1 \cdot 3/4) + \\ &+ x[2] \cos(2\pi \cdot 2 \cdot 3/4) - jx[2] \sin(2\pi \cdot 2 \cdot 3/4) + \\ &+ x[3] \cos(2\pi \cdot 3 \cdot 3/4) - jx[3] \sin(2\pi \cdot 3 \cdot 3/4) \end{aligned} \right.$$



Jeder  $X[k]$  DFT-Term ist die Summe des Punkt-für-Punkt-Produkts der Eingangsfolge  $x[n]$  und der komplexen Exponentialfunktion in der Form  $\cos(\varphi) - j \sin(\varphi)$ .

Die “Frequenz”  $[k]$  hängt ab von

- $f_s$  der Abtastfrequenz des Originalsignals und von
- $N$  der Anzahl der Samples.

Ist die Abtastfrequenz z.B. 480 Hz und die DFT hat 16 Punkte, dann ist der Frequenzraster

$$f_s/N = 480/16 = 30 \text{ Hz}$$

und die einzelnen Frequenzkomponenten sind:

$$X[0]= 0 \text{ Hz}, X[1]= 30 \text{ Hz}, X[2]= 60 \text{ Hz}, \dots, X[15]= 450 \text{ Hz}$$

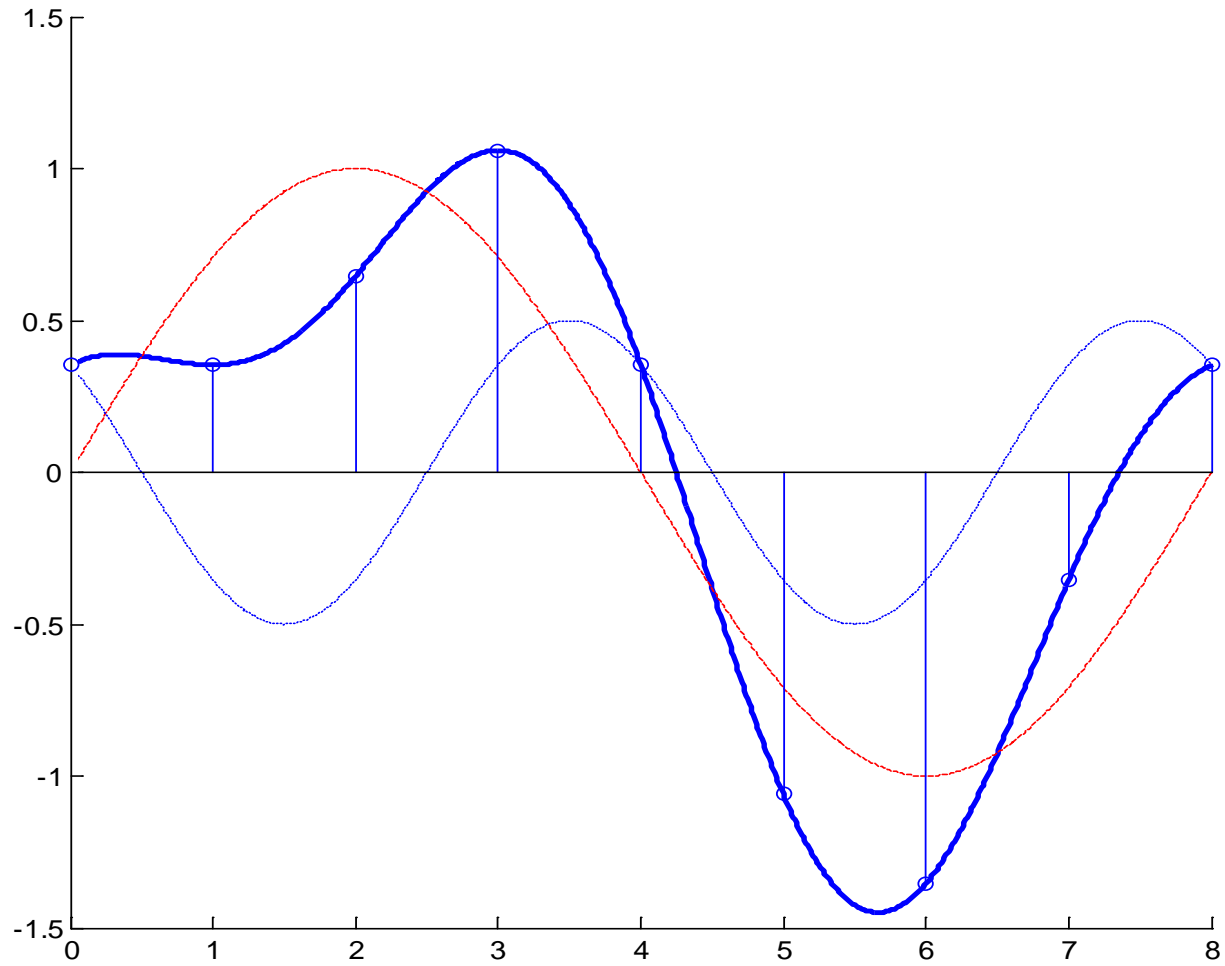
Beispiel:

$$x(t) = \sin(2\pi \cdot 1 \cdot t) + 0.5 \cos(2\pi \cdot 2 \cdot t + \frac{3}{4} \pi)$$

$$X(k) = \sum x[n] \left( \cos \left[ \frac{2\pi}{N} kn \right] - j \sin \left[ \frac{2\pi}{N} kn \right] \right)$$

Siehe Berechnung in Excel-File.

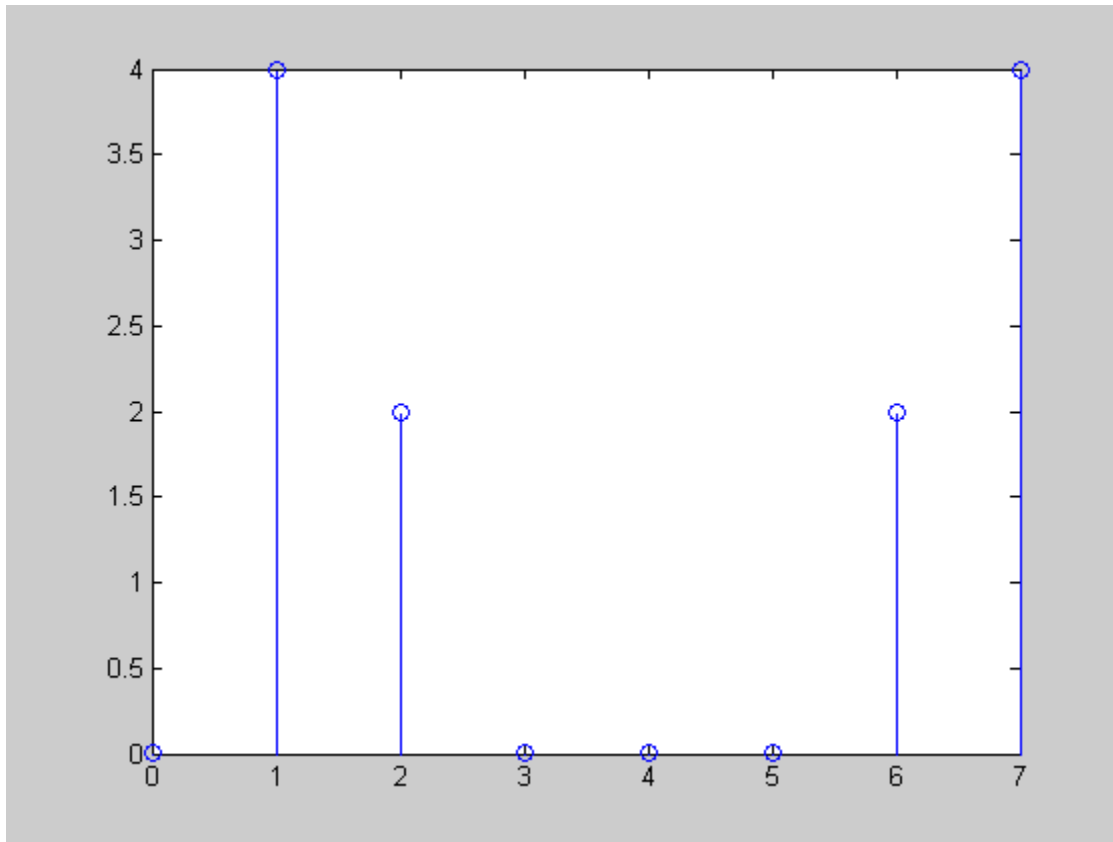
$$x[n] = [0.3536 \quad 0.3536 \quad 0.6464 \quad 1.0607 \quad 0.3536 \quad -1.0607 \quad -1.3536 \quad -0.3536 \quad 0.3536]$$



x[n]	"2pi/8"	n	k=1	cos	sin	x[n].cos	x[n].sin	
0,3535	0,785398	0	0,000	1,000	0,000	0,354	0,000	
0,3535	0,785398	1	0,785	0,707	0,707	0,250	0,250	
0,6464	0,785398	2	1,571	0,000	1,000	0,000	0,646	
1,0607	0,785398	3	2,356	-0,707	0,707	-0,750	0,750	
0,3535	0,785398	4	3,142	-1,000	0,000	-0,354	0,000	
-1,0607	0,785398	5	3,927	-0,707	-0,707	0,750	0,750	
-1,3535	0,785398	6	4,712	0,000	-1,000	0,000	1,354	
-0,3535	0,785398	7	5,498	0,707	-0,707	-0,250	0,250	
						<b>0,000</b>	<b>-4,000</b>	<b>4 ∠ -90 Grad</b>

$x = 0.3535 \quad 0.3535 \quad 0.6464 \quad 1.0607 \quad 0.3535 \quad -1.0607 \quad -1.3535 \quad -0.3535$

$X = \text{fft}(x)$



**Achtung!**

Betragspektrum

$$|X[1]| = 4 \quad |X[2]| = 2$$

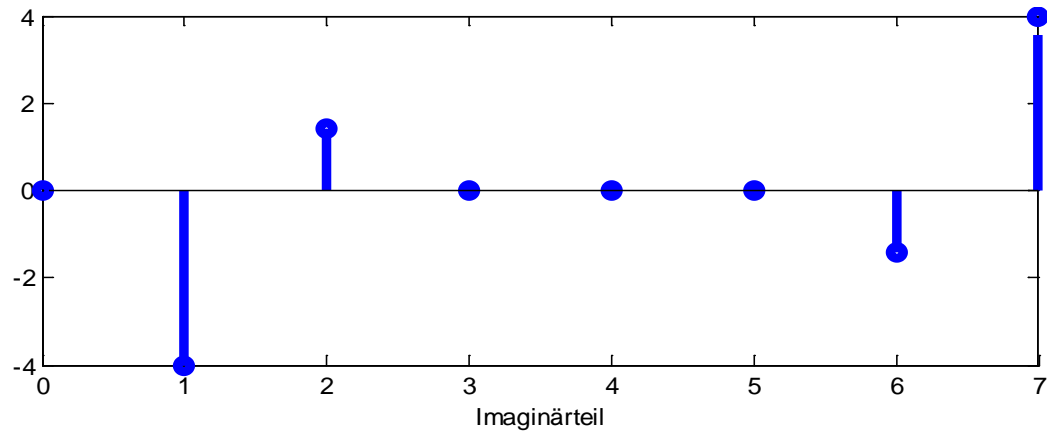
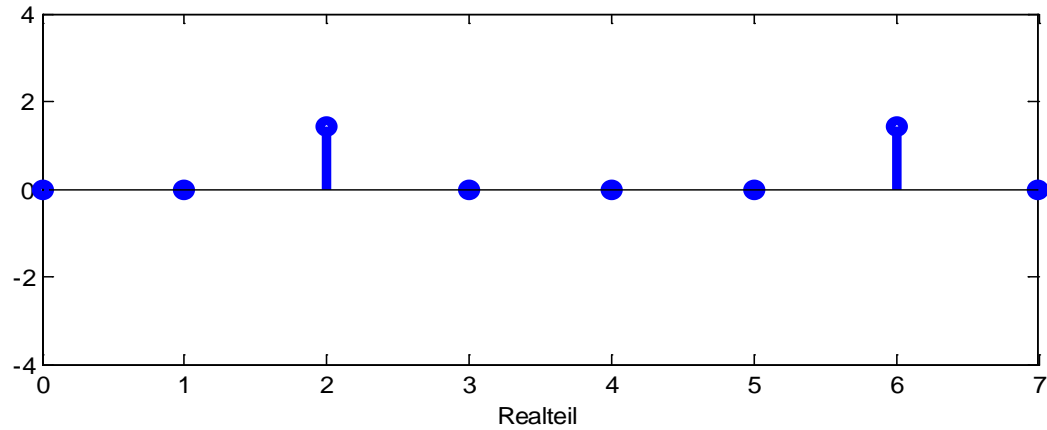
$$A_1 = 1 \quad A_2 = 0.5$$

$$X_A^r = A \frac{N}{2} \quad \text{reell}$$

$$X_A^k = AN \quad \text{komplex}$$

$$x(t) = \sin(2\pi \cdot 1 \cdot t) + 0.5 \cos(2\pi \cdot 2 \cdot t + \frac{3}{4}\pi)$$

# Real- & Imaginärteil der DFT



## FFT Discrete Fourier transform.

FFT(X) is the discrete Fourier transform (DFT) of vector X. For matrices, the FFT operation is applied to each column. For N-D arrays, the FFT operation operates on the first non-singleton dimension.

## IFFT Inverse discrete Fourier transform.

IFFT(X) is the inverse discrete Fourier transform of X.

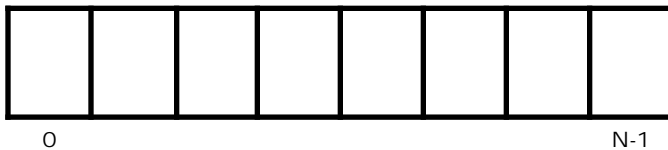
- Das Aufbausignal für alle Formen der FT ist die komplexe Exponentialfunktion.
- Die komplexe Exponentialfunktion erstreckt sich von  $-\infty$  bis  $\infty$ .
- Für die Synthese eines **aperiodischen** Signals sind  $\infty$  viele Frequenzkomponenten erforderlich (die sich durch Überlagerung auslöschen können).
- $\infty$  viele Komponenten können in einem Digitalrechner nicht gespeichert werden.
- **Die DFT beschreibt diskrete, periodische Signale.**



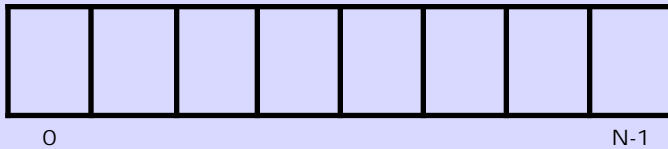
# (Komplexe) DFT

## Zeitbereich

Realteil

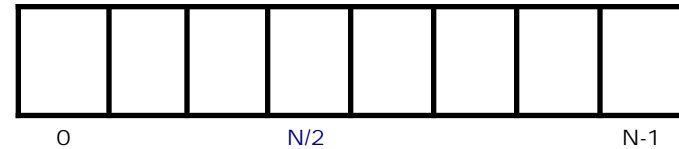


Imaginärteil

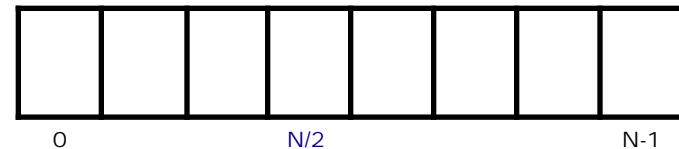


## Frequenzbereich

Realteil



Imaginärteil

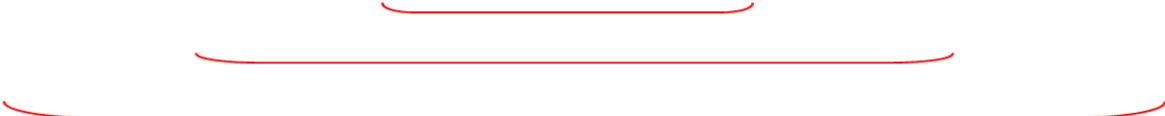


# Symmetrie der DFT

## Frequenzkomponenten

$$k = 1 \text{ bis } k = \frac{N}{2} - 1 \quad \Leftrightarrow \quad k > \frac{N}{2}$$

0	1	2	3	4	5	6	7
-0.0001	0 -3.9999i	1.4141 + 1.4144i	0 - 0.0001i	-0.0001	0 + 0.0001i	1.4141 - 1.4144i	0 + 3.9999i



$$X[k] = X^* [N - k]$$

Realteil  $\rightarrow$  gerade, Imaginärteil  $\rightarrow$  ungerade

# Frequenzachse der DFT

Durch die Abtastung der Signale geht die Frequenzachse verloren.

$$\hat{\omega} = nT_s$$

$$x[n] = x(nT_s) = A \cos(\omega nT_s + \varphi) = A \cos(\hat{\omega}n + \varphi)$$

$$f_{\text{kontinuierlich}} = \frac{k f_s}{N}$$

Abstand der Spektrallinien  $\frac{f_s}{N}$

Außerhalb dieses Rasters gibt es bei diskreten Signalen keine Frequenzkomponenten!

## (Zirkuläre) Verschiebung im Zeitbereich

$$x[n] \Leftrightarrow X[k]$$

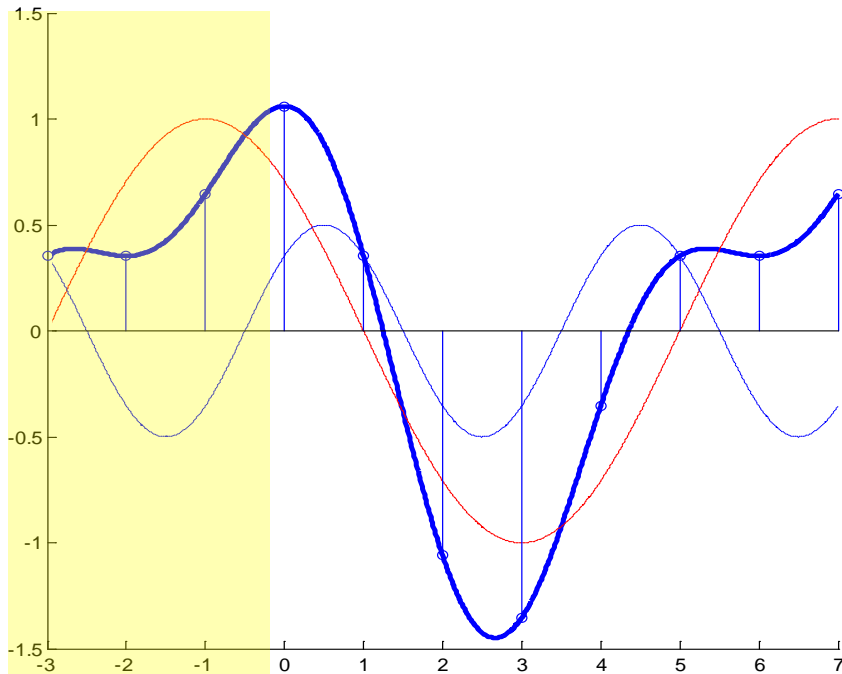
$$x[n - m] \Leftrightarrow X_{\text{verschoben}}[k] = X[k] e^{-j \frac{2\pi k}{N} m}$$

Jede Spektralkomponente erfährt eine  
frequenzproportionale (lineare) Phasenverschiebung  $e^{-j \frac{2\pi k}{N} m}$

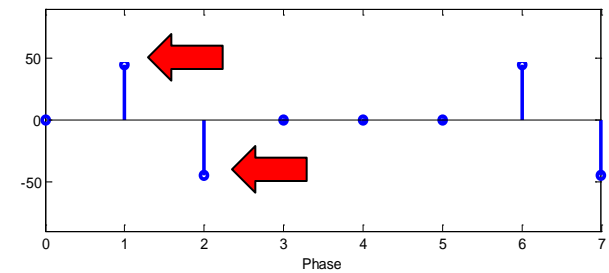
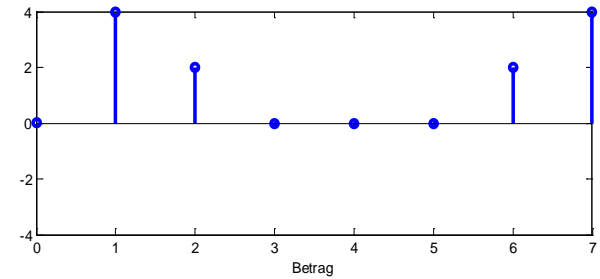
$$x[n] = [0.3536 \quad 0.3536 \quad 0.6464 \quad 1.0607 \quad 0.3536 \quad -1.0607 \quad -1.3536 \quad -0.3536 \quad 0.3536]$$

$$k = 1 \rightarrow -90^\circ, \quad k = 2 \rightarrow +45^\circ$$

$$x[n] = [1.0607 \quad 0.3536 \quad -1.0607 \quad -1.3536 \quad -0.3536 \quad 0.3536 \quad 0.3536 \quad 0.3536 \quad 0.6464]$$



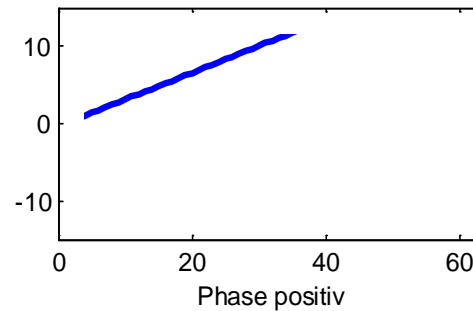
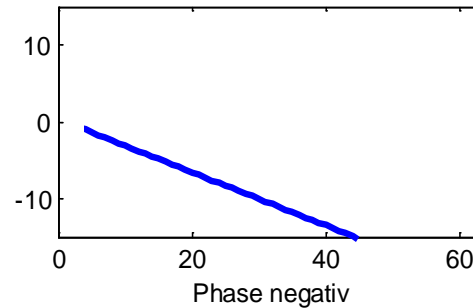
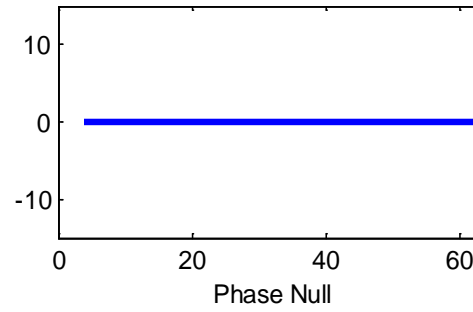
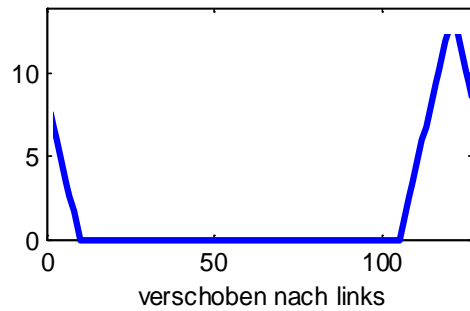
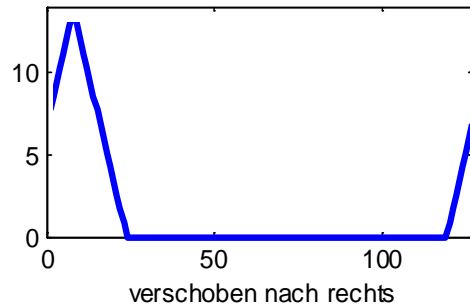
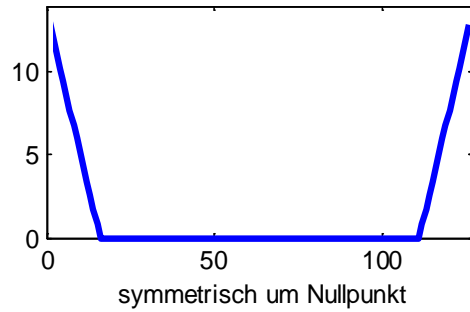
DSP



$$\Rightarrow -90^\circ + \underbrace{e^{j\frac{2\pi 1}{8} 3}}_{135^\circ} = +45^\circ$$

$$\Rightarrow +45^\circ + \underbrace{e^{j\frac{2\pi 2}{8} 3}}_{270^\circ} = 315^\circ = -45^\circ$$

# Dreiecksfolge



Zeitbereich

DSP

Frequenzbereich (Phase)

# DFT

$$X[k] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] e^{-j\frac{2\pi n}{N}k}$$

# iDFT

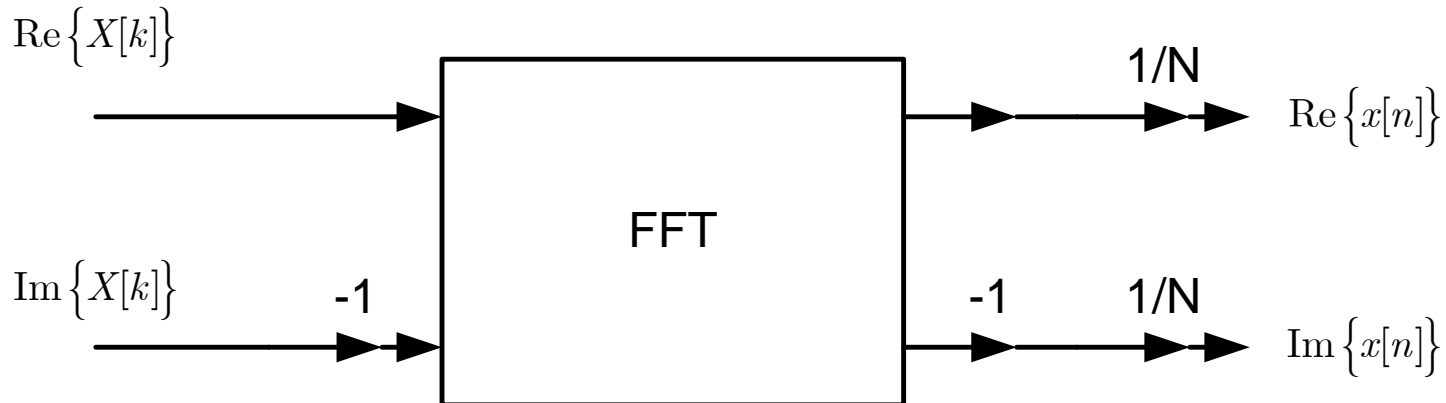
$$x[n] = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X[k] e^{j\frac{2\pi k}{N}n}$$

# Berechnung der iDFT mit der DFT

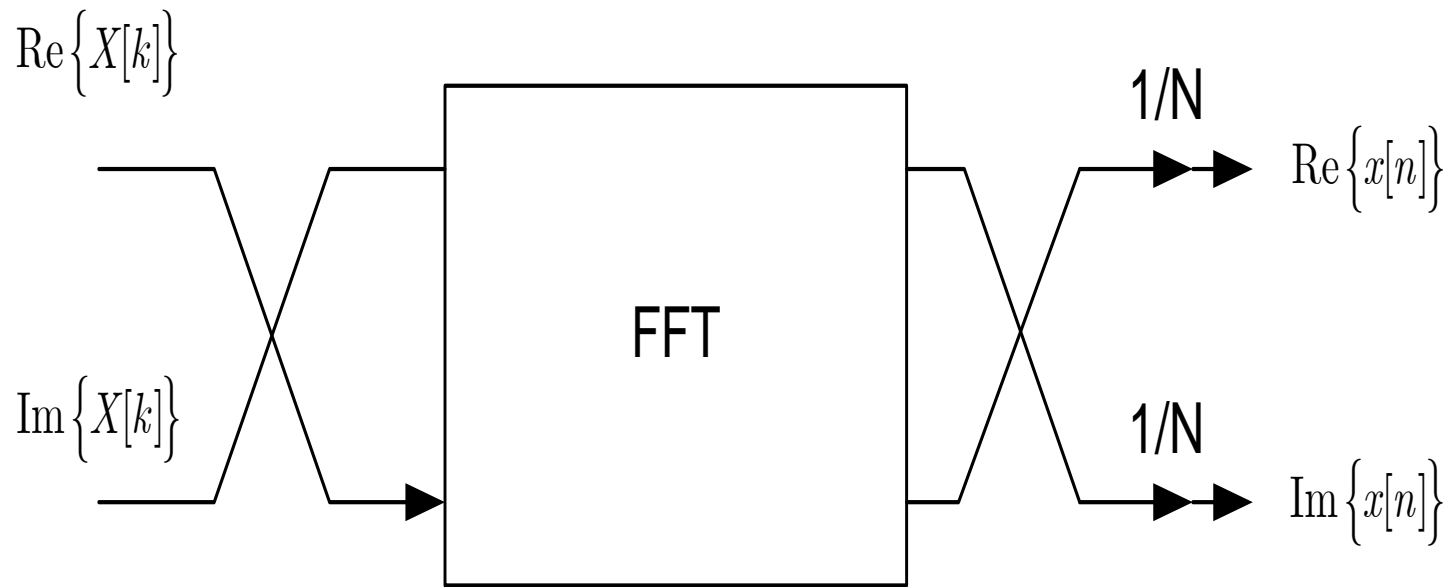
$$x[n]^* = \left\{ \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X[k] e^{j\frac{2\pi}{N}kn} \right\}^* = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X[k]^* e^{-j\frac{2\pi}{N}kn}$$

$$x[n] = \left\{ \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X[k]^* e^{-j\frac{2\pi}{N}kn} \right\}^*$$

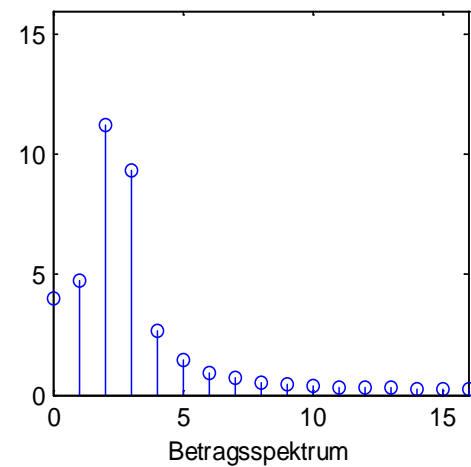
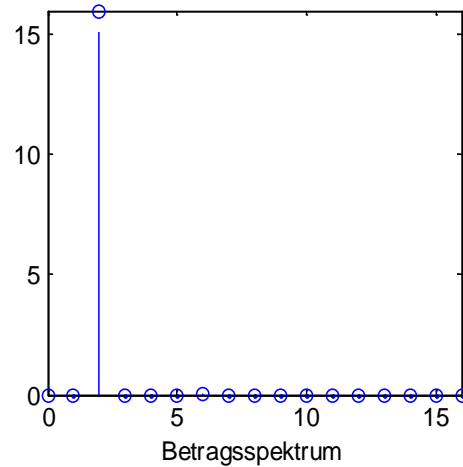
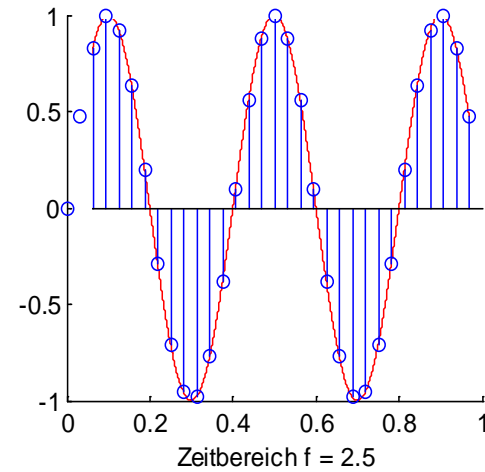
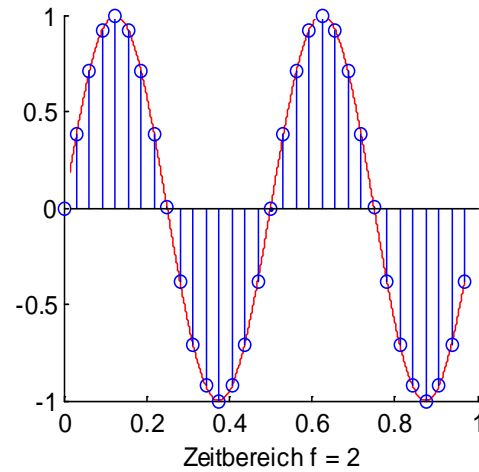
1.  $\mathbf{X} \rightarrow \mathbf{X}^*$
2.  $FFT(\mathbf{X}^*)$
3. Skalieren mit  $1/N$
- (4.  $\mathbf{x}^*$  kann entfallen bei reellen Zeitfolgen)







# Frequenzachse der DFT (2)



# Leakage

$$\bar{x}[n] = e^{j(\hat{\omega}_0 n + \varphi)}$$

⇓

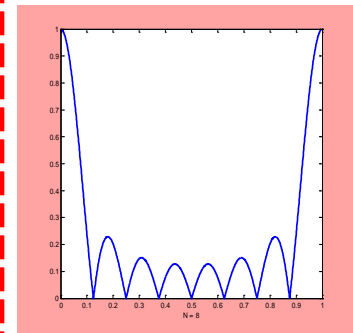
$$X[k] = \sum_{n=0}^{N-1} \bar{x}[n] e^{-j(2\pi/N)kn} = \sum_{n=0}^{N-1} e^{j(\hat{\omega}_0 n + \varphi)} e^{-j(2\pi/N)kn}$$

⋮

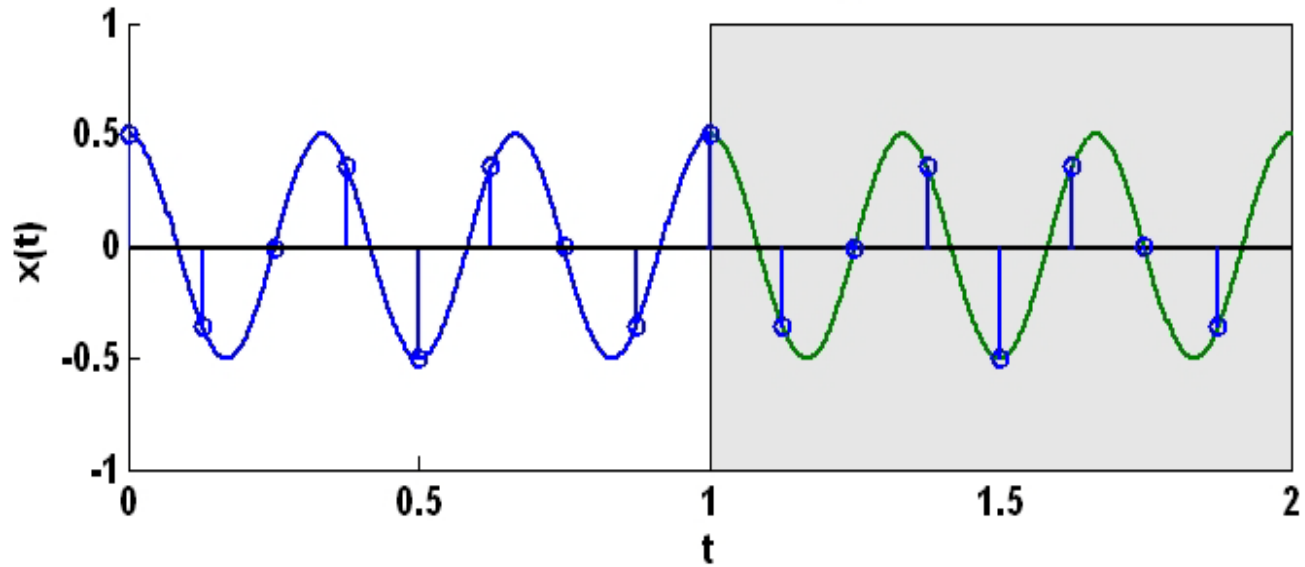
$$X[k] = \underbrace{e^{j\varphi} e^{-j \frac{(N-1)}{2} \left( \frac{2\pi k}{N} - \hat{\omega}_0 \right)}}_{\text{nur Phase}} \cdot \frac{\sin \left( \frac{N}{2} \left( \frac{2\pi k}{N} - \hat{\omega}_0 \right) \right)}{\sin \left( \frac{1}{2} \left( \frac{2\pi k}{N} - \hat{\omega}_0 \right) \right)}$$

$$\frac{\sin \left( \frac{N}{2} \left( \frac{2\pi k}{N} - \hat{\omega}_0 \right) \right)}{\sin \left( \frac{1}{2} \left( \frac{2\pi k}{N} - \hat{\omega}_0 \right) \right)}$$

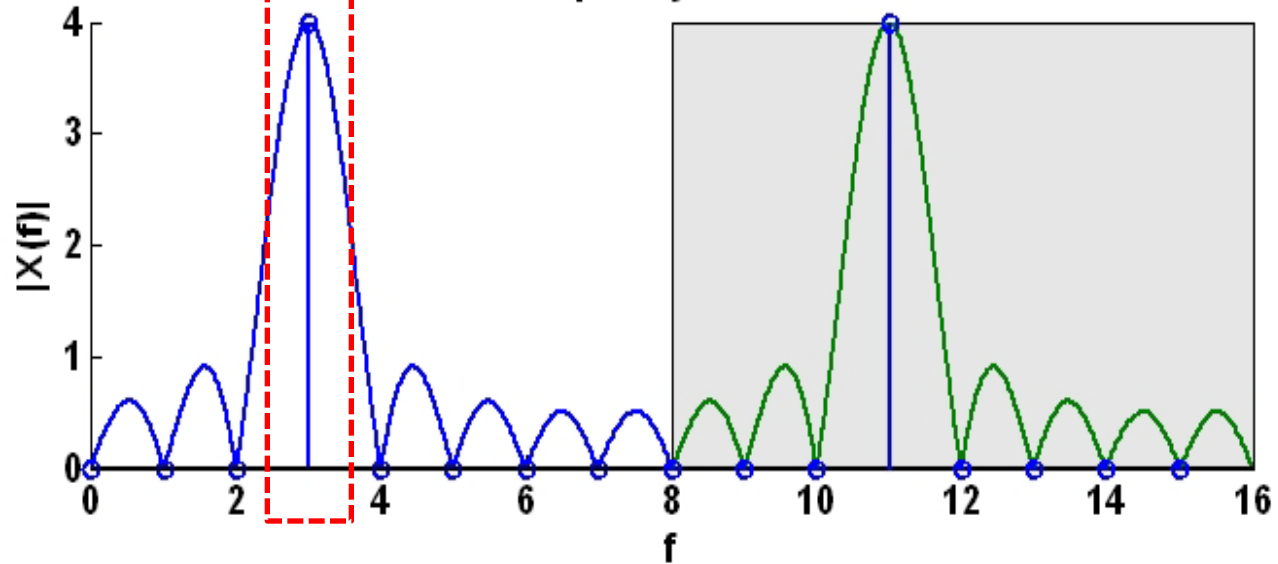
Diriclet'sche Funktion



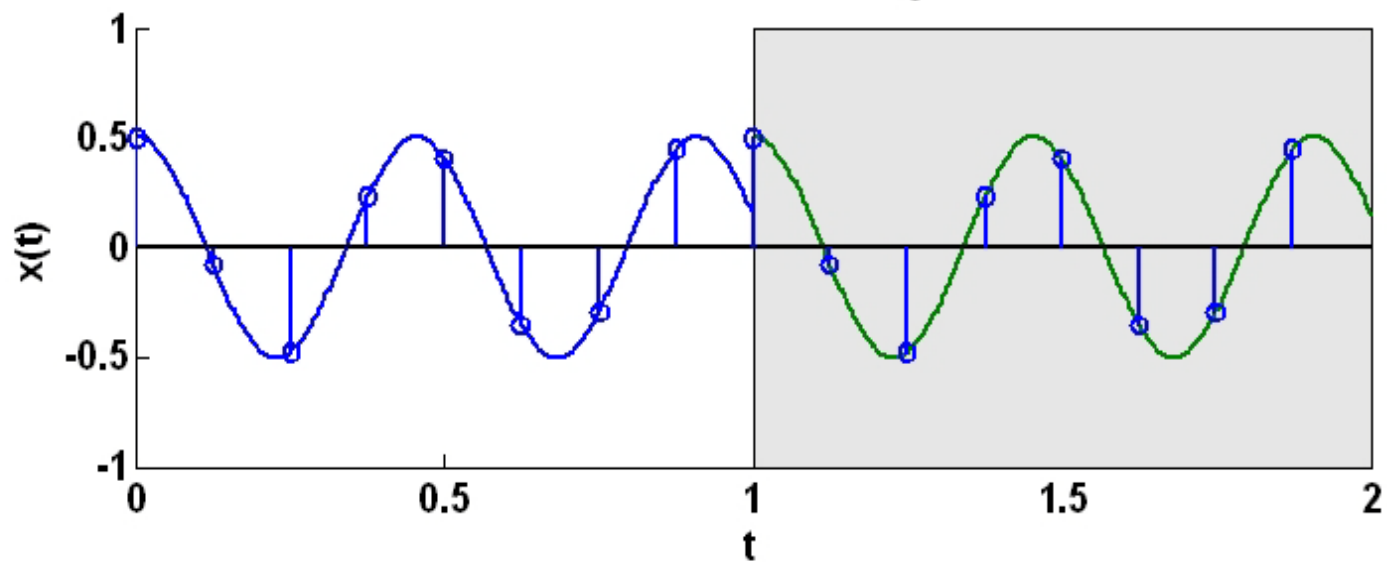
Time-Domain ( $f = 3$ ,  $T = 1$ ,  $f_s = 8$ ,  $N = 8$ )



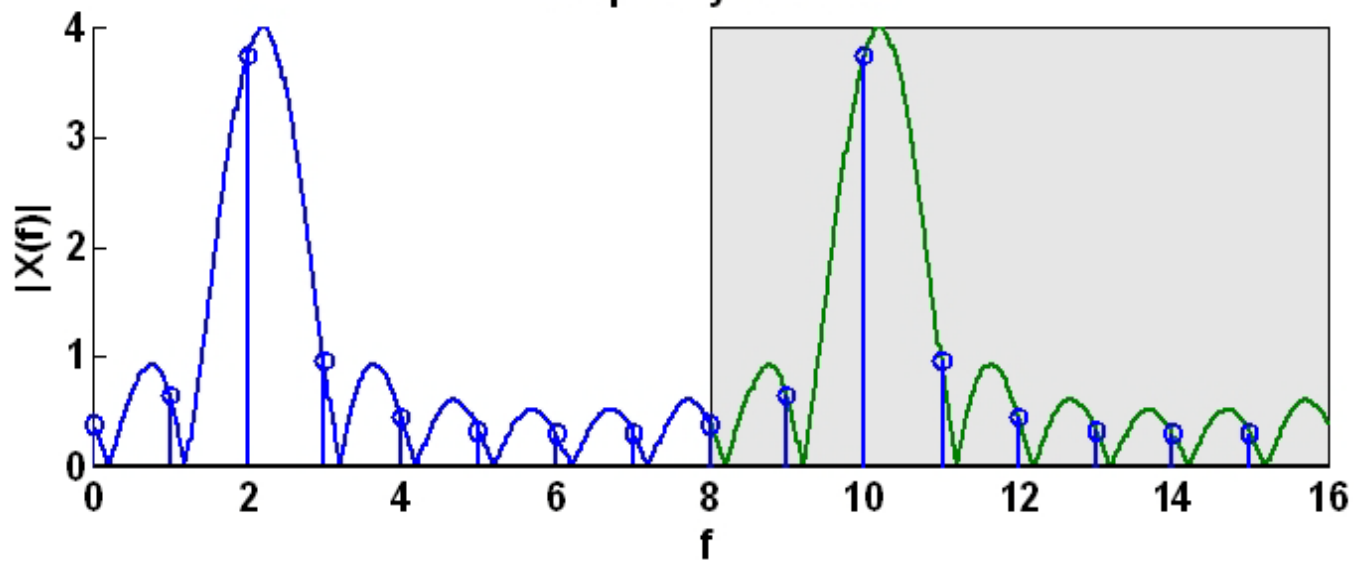
Frequency-Domain



Time-Domain ( $f = 2.2$ ,  $T = 1$ ,  $f_s = 8$ ,  $N = 8$ )

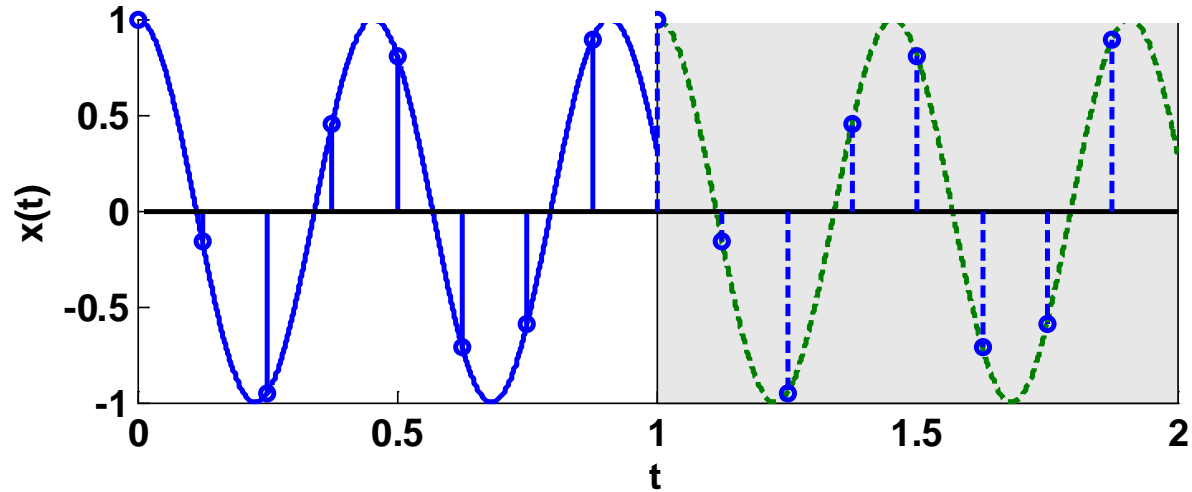


Frequency-Domain

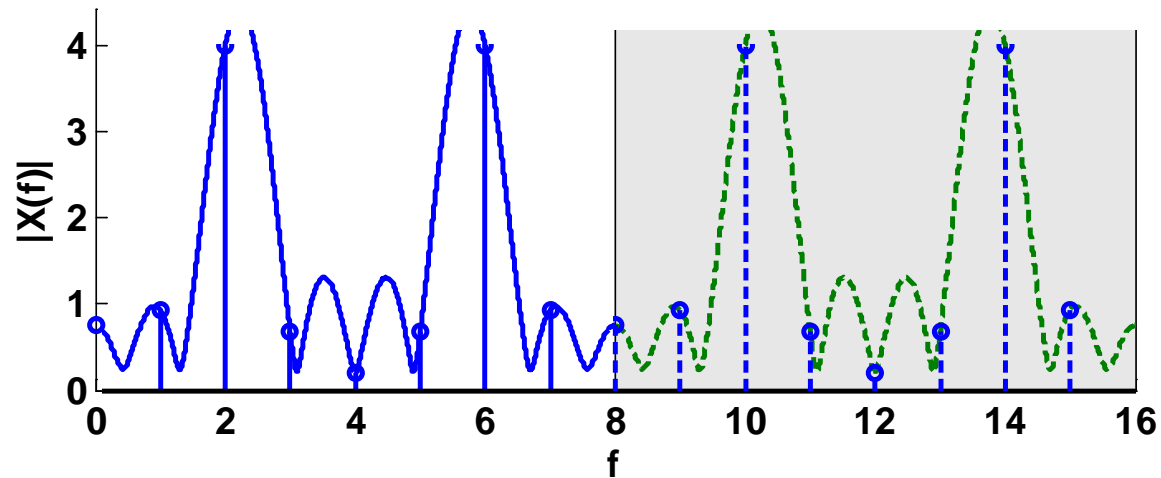


# Kosinus

Time-Domain ( $f = 2.2$ ,  $T = 1$ ,  $f_s = 8$ ,  $N = 8$ )

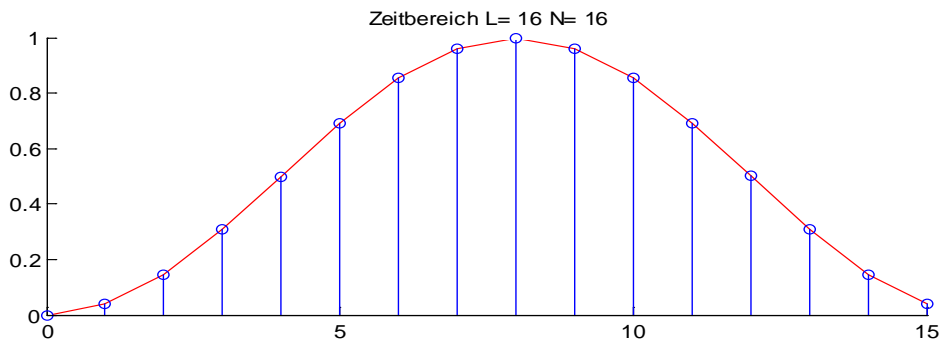


Frequency-Domain

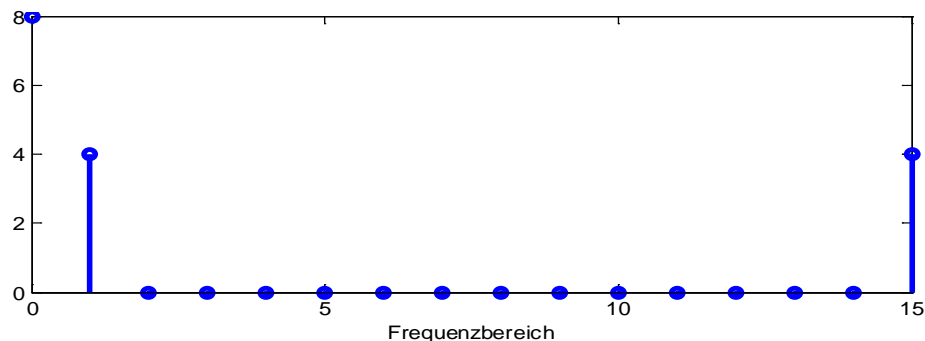


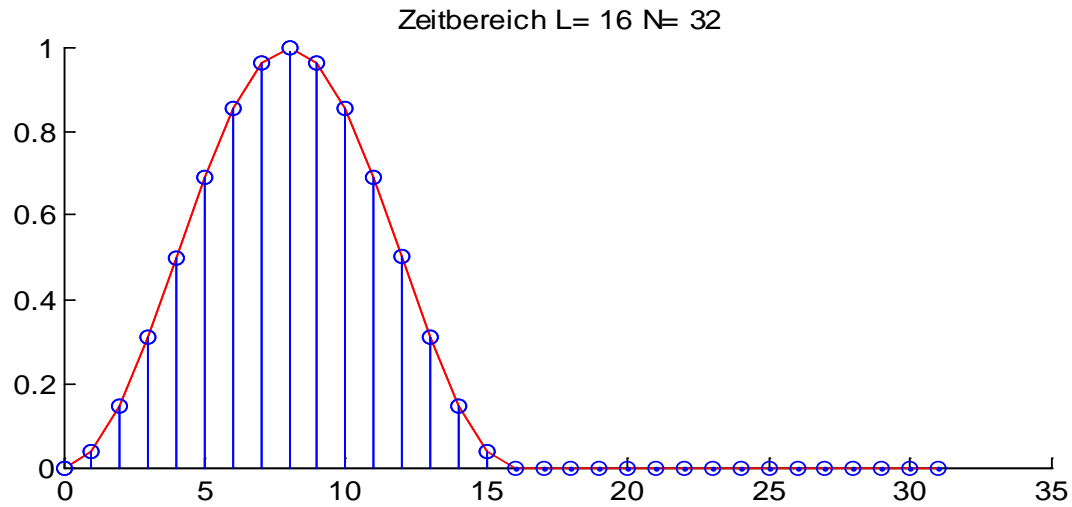
# Nichtperiodische Signale (Zero Padding)

Die DFT beruht auf periodischen Folgen, die Signaldarstellung im Zeit- und im Frequenzbereich ist daher immer periodisch.

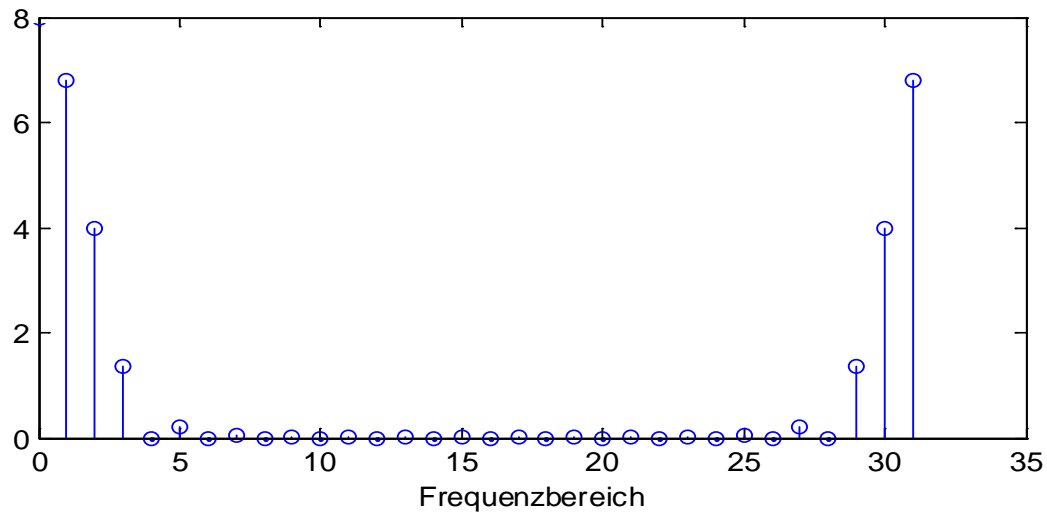


$$x[n] = \begin{cases} 0.5 \left[ 1 - \cos\left(\frac{2\pi n}{L}\right) \right] & 0 \leq n \leq L-1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$



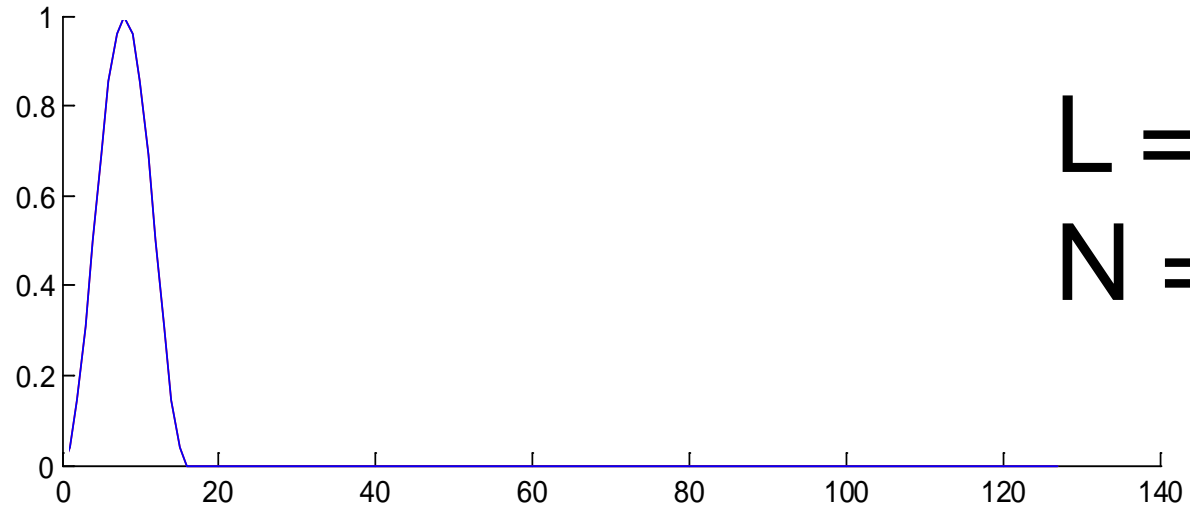


$L = 16$   
 $N = 32$

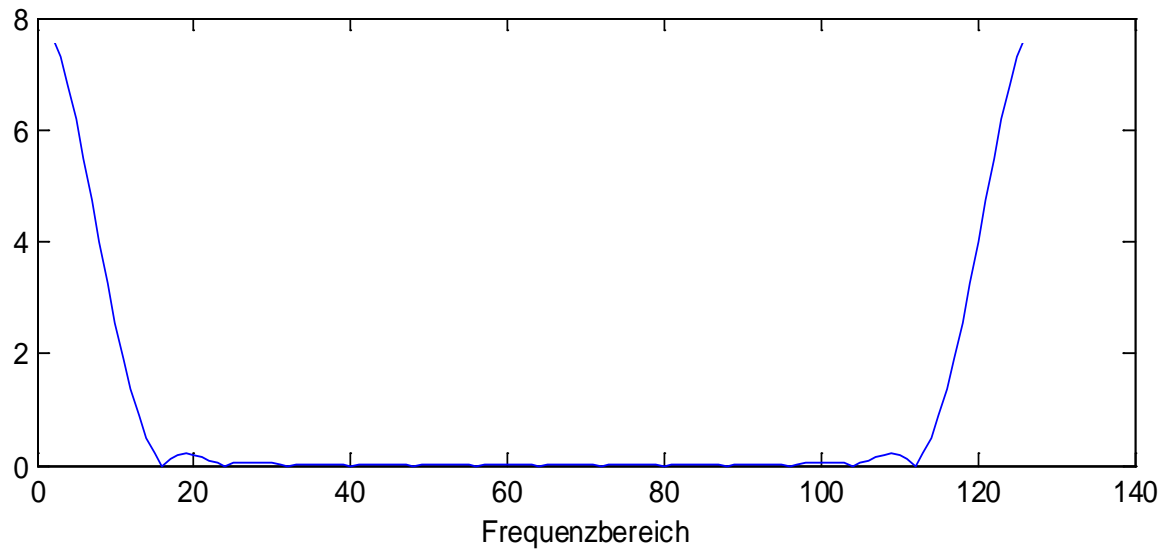




Zeitbereich  $L = 16$   $N = 128$



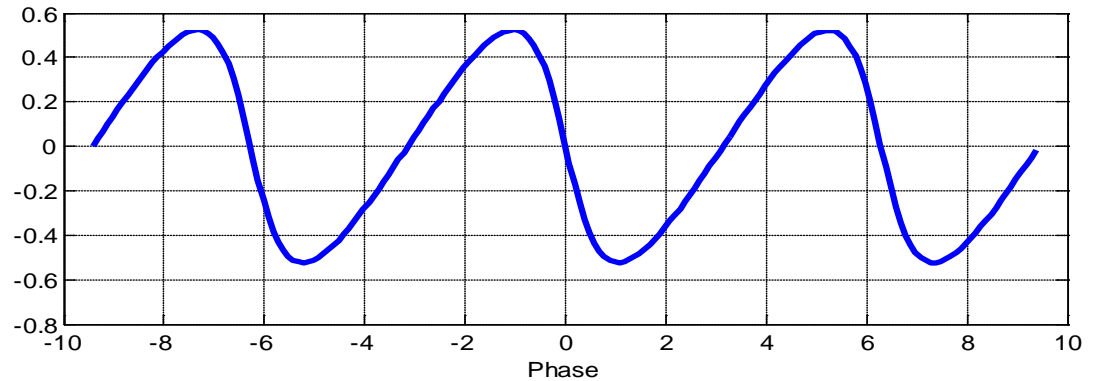
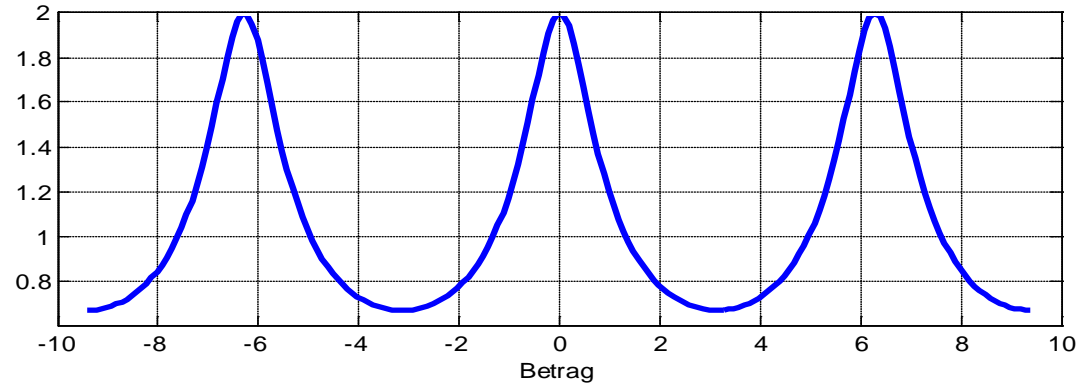
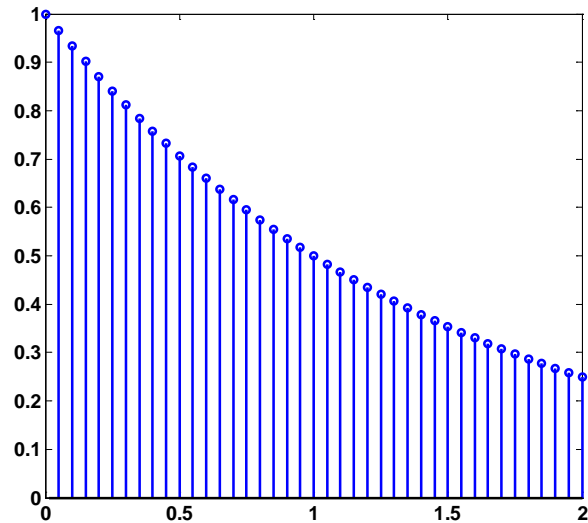
$L = 16$   
 $N = 128$



$N \rightarrow \infty$       **(DTFT)**

$$X(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] e^{-j\omega n}$$

$$x[n] = (0.5)^n \delta_{-1}[n] \quad \text{DTFT} \quad X(\omega) = \frac{1}{1 - 0.5e^{-j\omega}}$$

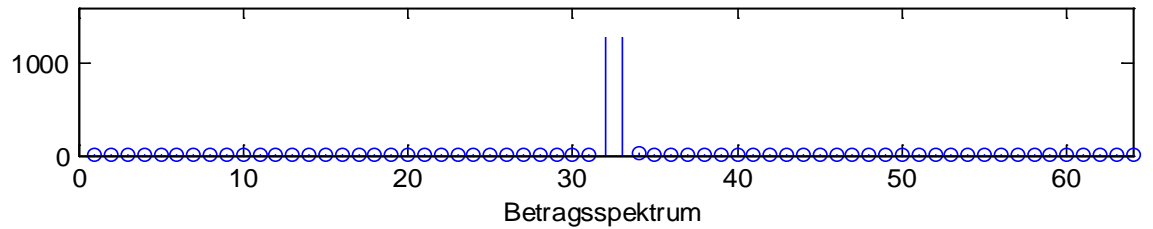
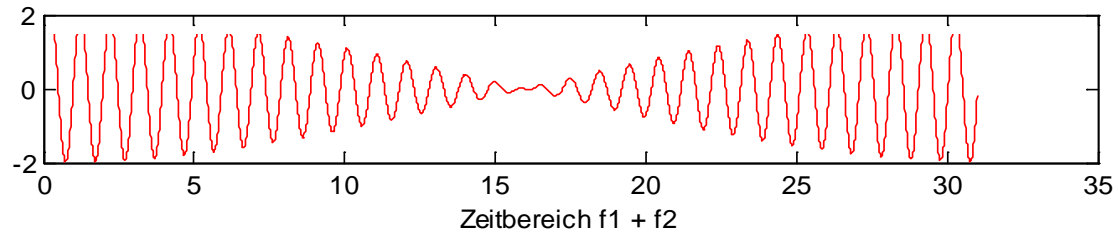
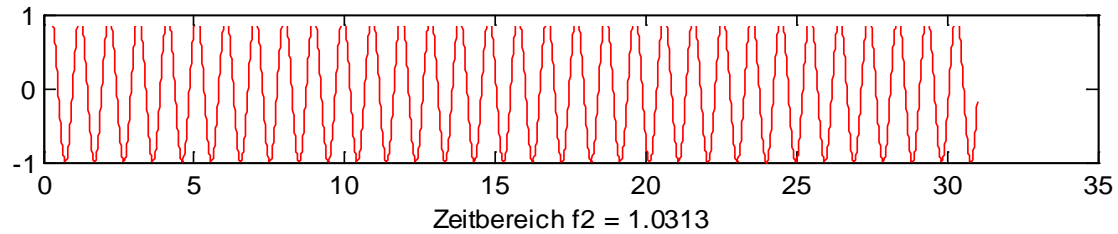
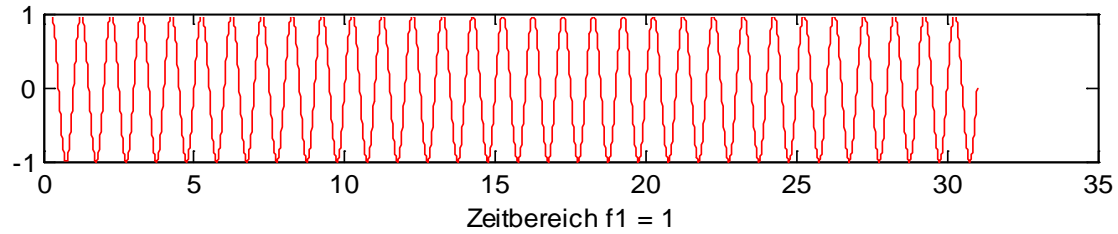


Zero Padding verbessert die Darstellung der DFT.

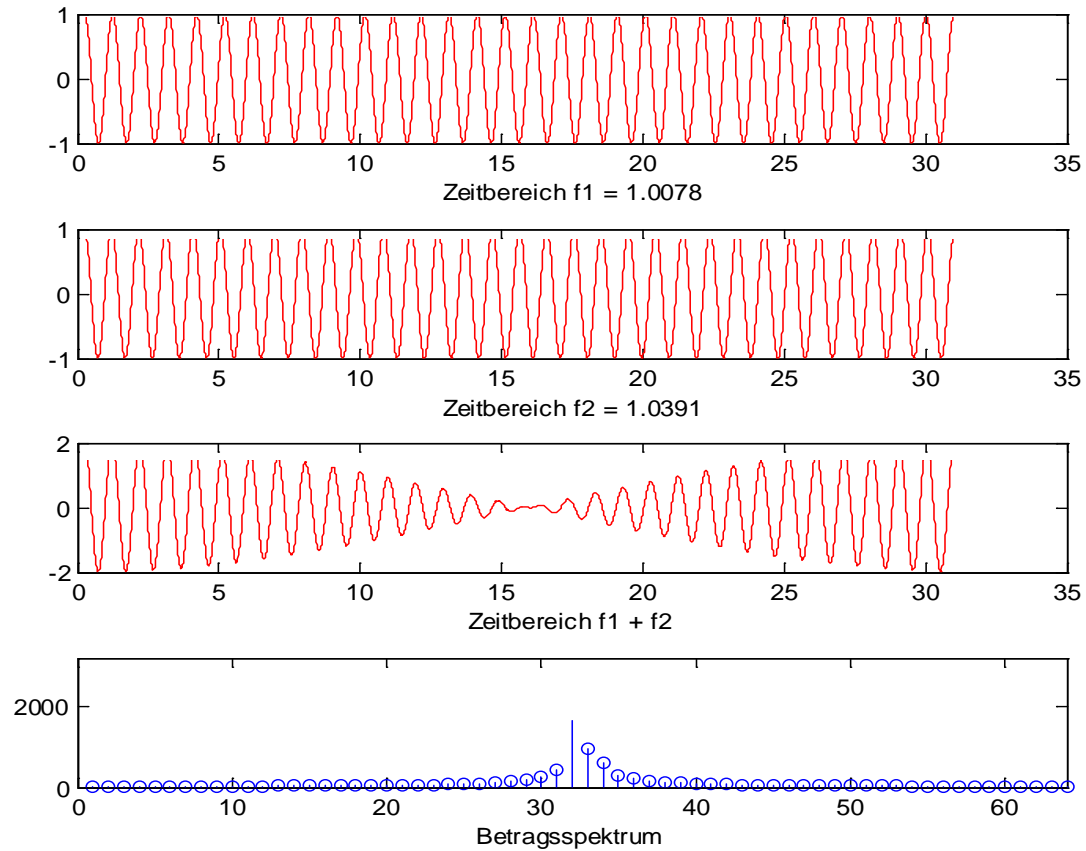
**Zero Padding verbessert die Trennung zweier nahe neben einander liegender Spektralkomponenten nicht!**

Um die spektrale Auflösung von zwei Signalen zu verbessern, müssen bei der Abtastung mehr Signalproben (ungleich Null) genommen werden.

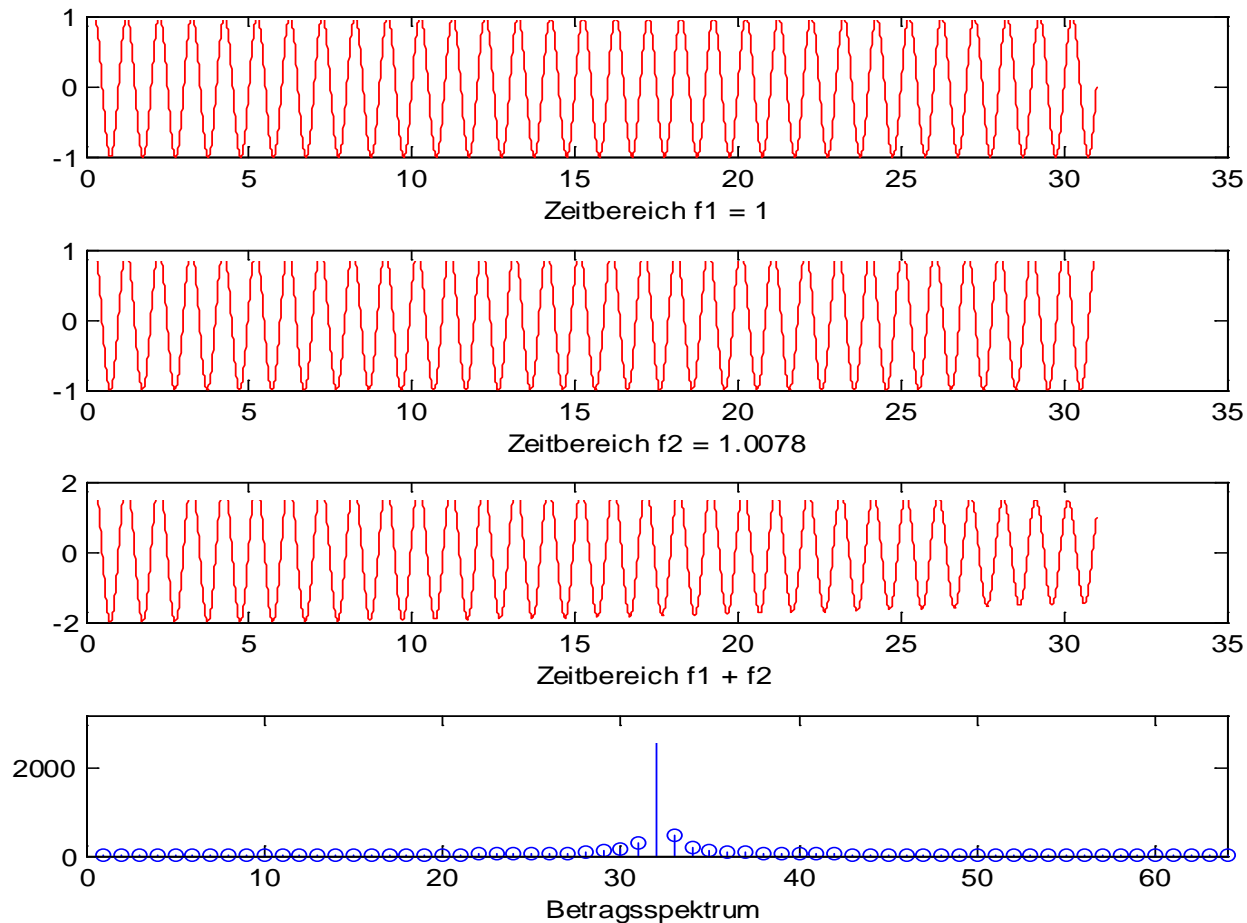
Um zwei benachbarte Spektrallinien auflösen zu können, muss der Abstand der Spektrallinien  $\geq$  als der Abstand des Frequenzrasters sein.



**Spektrallinien liegen (zufällig) auf dem Frequenzraster!**



Spektrallinien um ein Viertel des Frequenzrasters verschoben  
 → Leakage



Eine Spektrallinie auf dem Frequenzraster,  
 zweite Spektrallinie im Abstand von einem Viertel der  
 Rasterfrequenz → können nicht getrennt werden!

# Fensterertechnik

$$X[k] = \frac{\sin\left(\frac{N}{2}\left(\frac{2\pi k}{N} - \hat{\omega}_0\right)\right)}{\sin\left(\frac{1}{2}\left(\frac{2\pi k}{N} - \hat{\omega}_0\right)\right)}$$

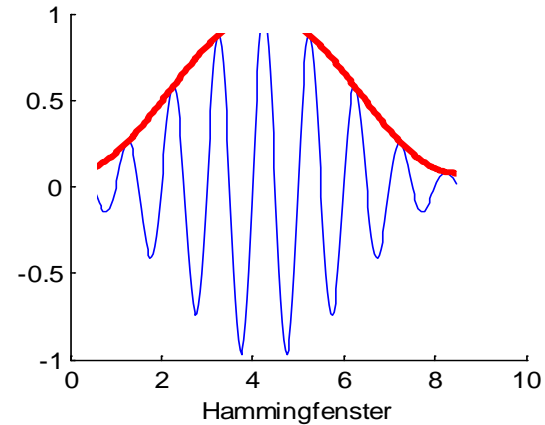
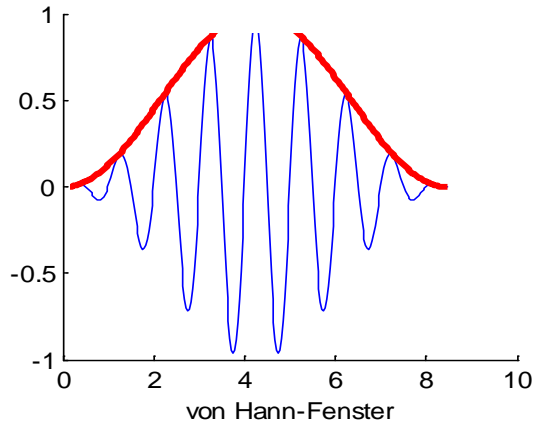
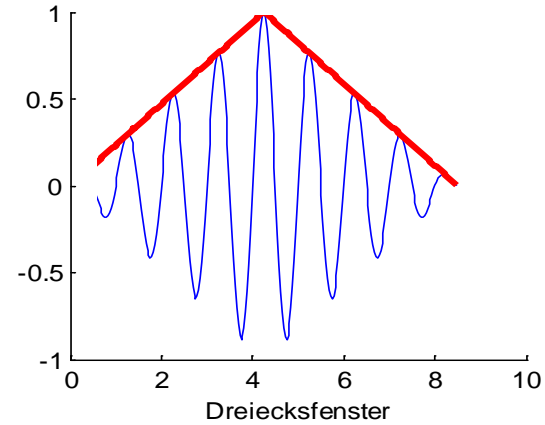
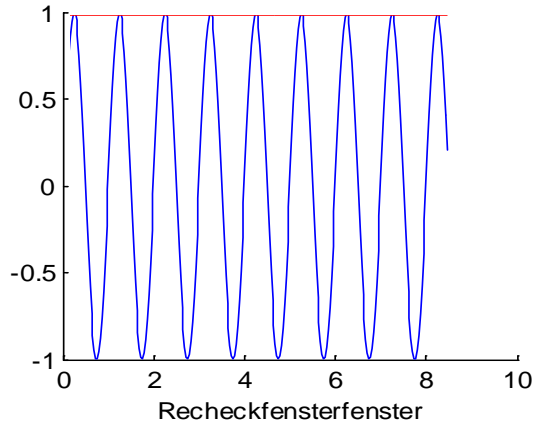
»Amplitudengang« der DFT

---

$$\bar{x}[n] = e^{j(\hat{\omega}_0 n + \varphi)}$$

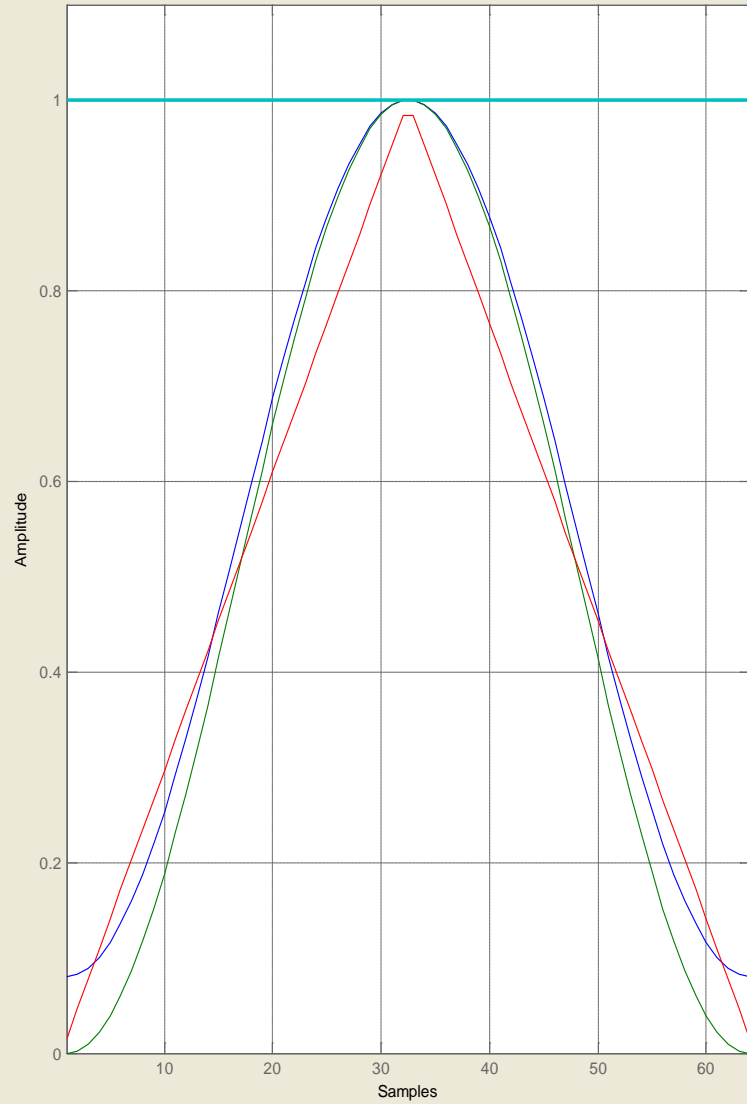
Im Zeitbereich durch Rechteckfenster beschnitten.



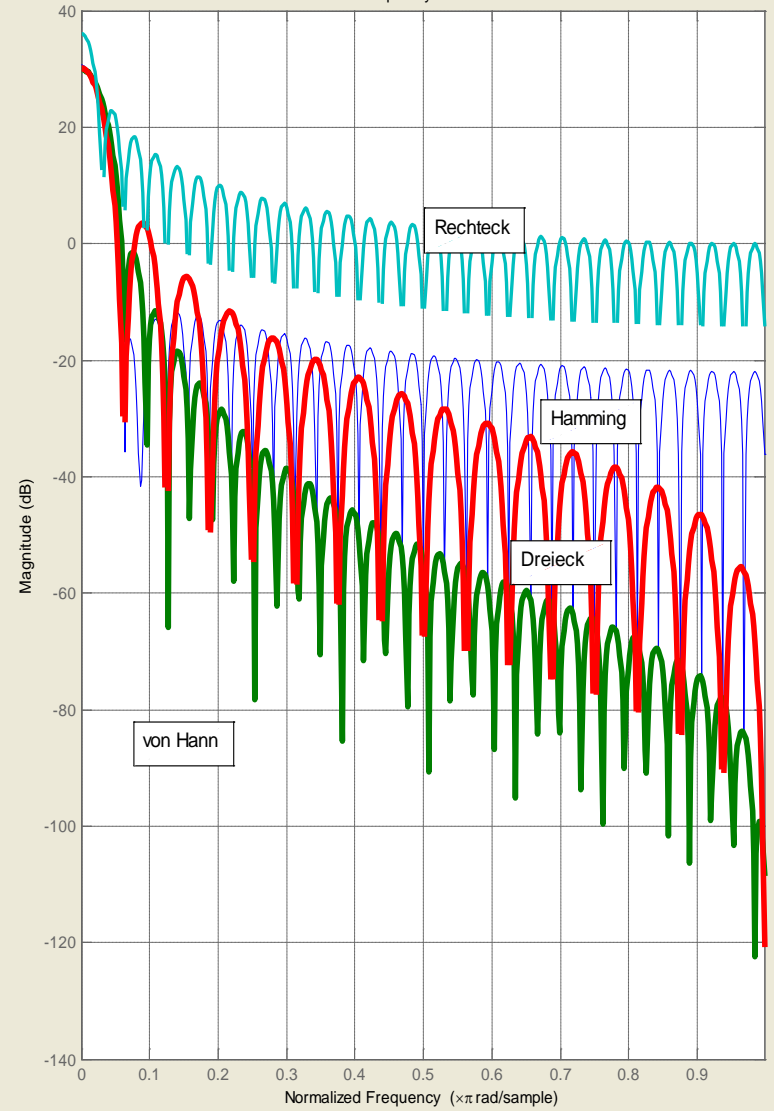


$$X[k] = \sum_{n=0}^{N-1} w[n] x[n] e^{-j\frac{2\pi n}{N}k}$$

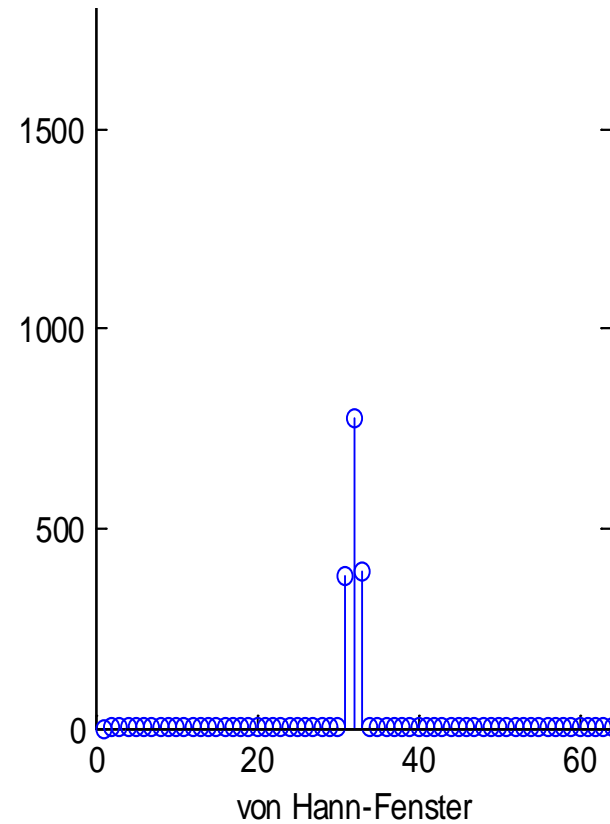
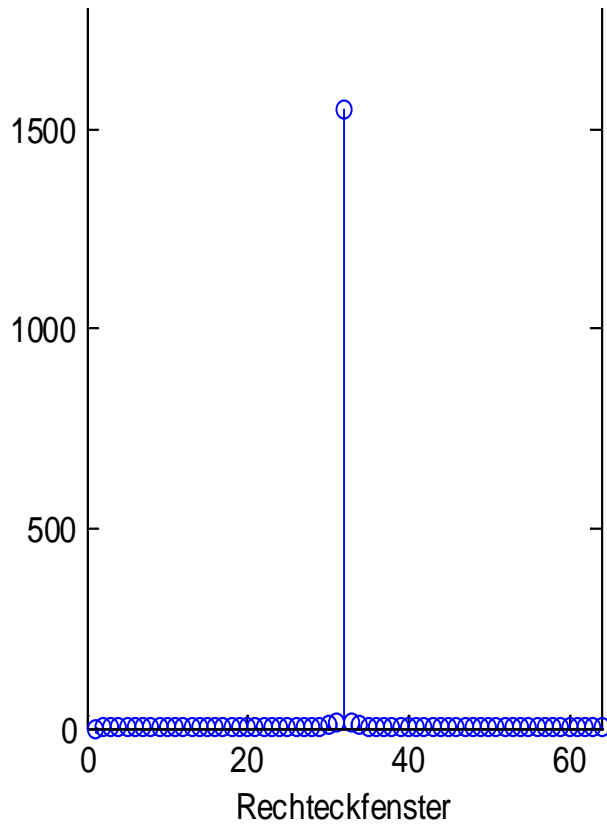
Time domain



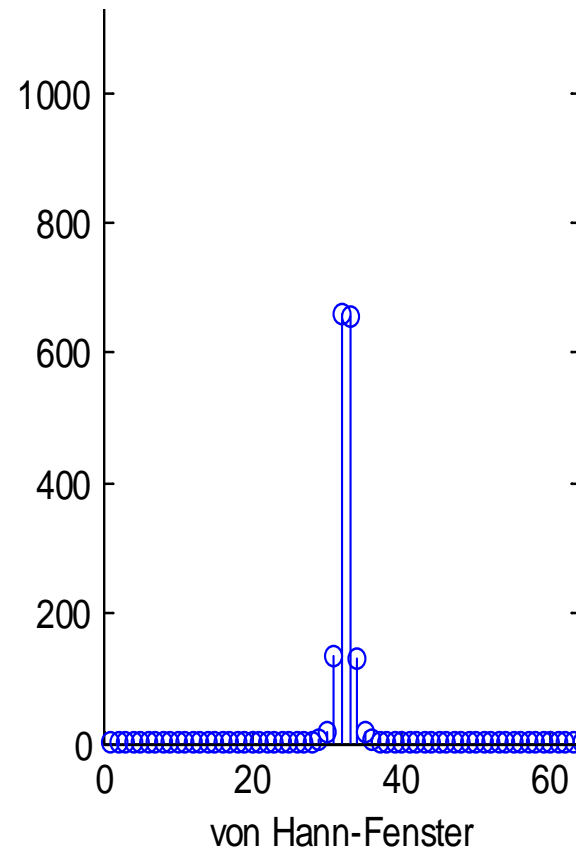
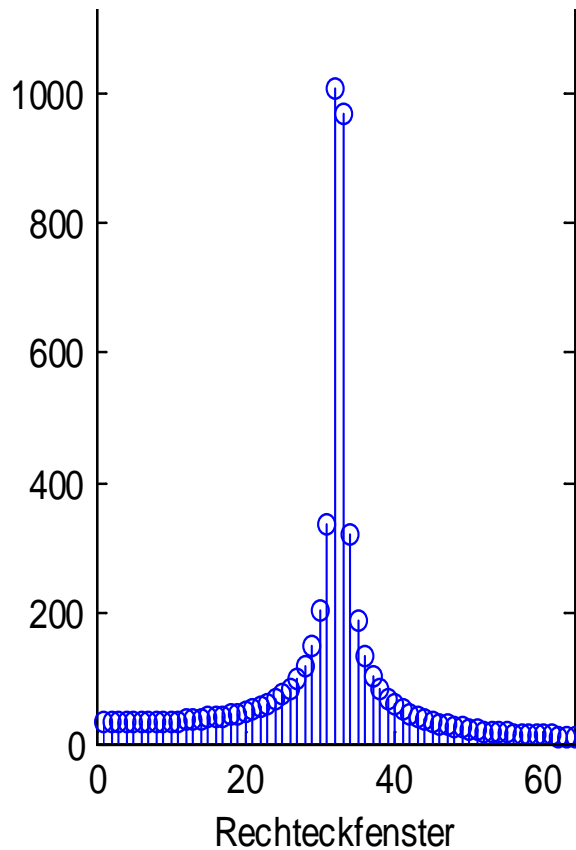
Frequency domain



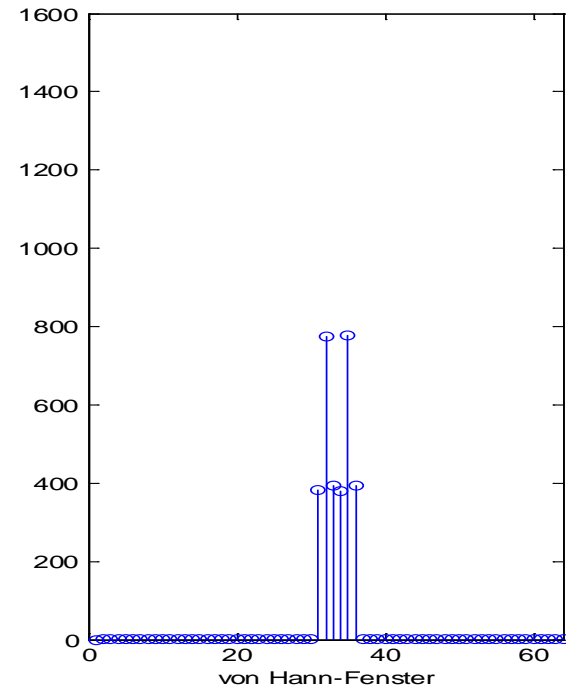
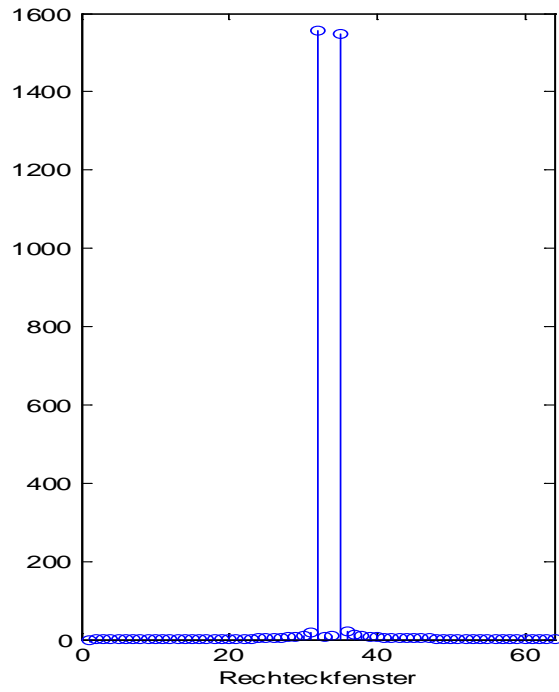
# Spektralkomponente auf Raster



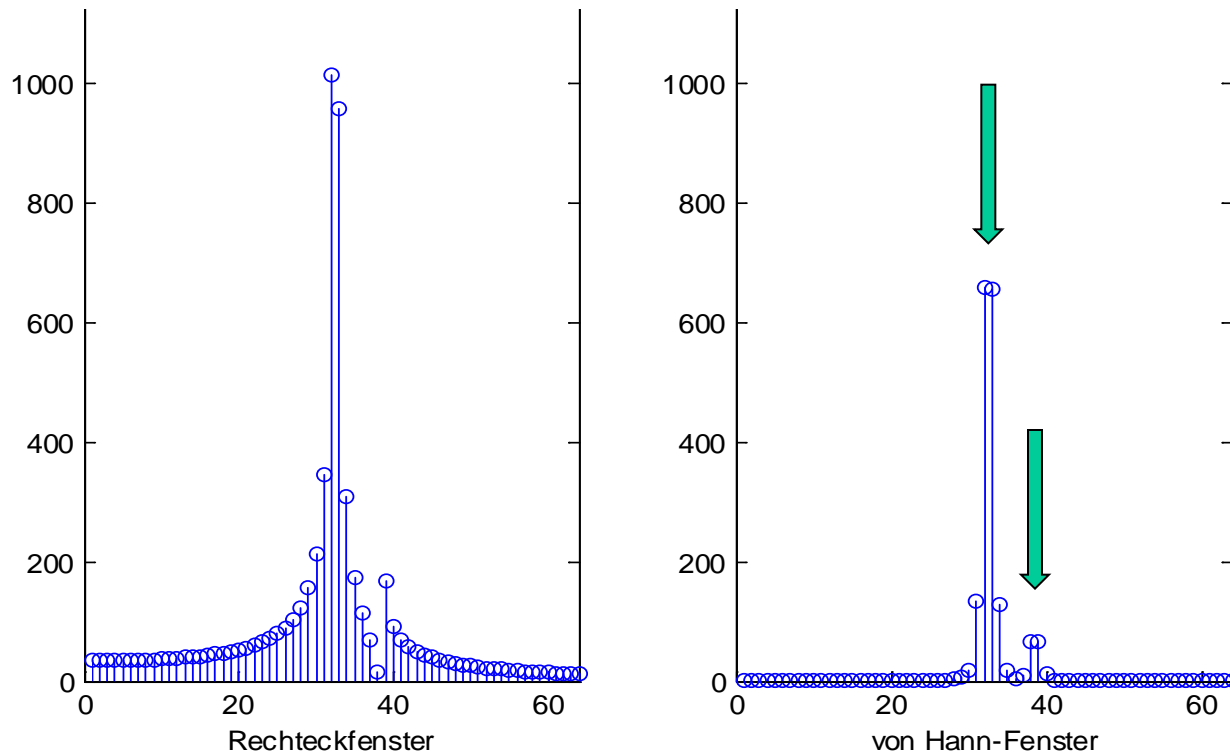
# Spektralkomponente nicht auf Raster



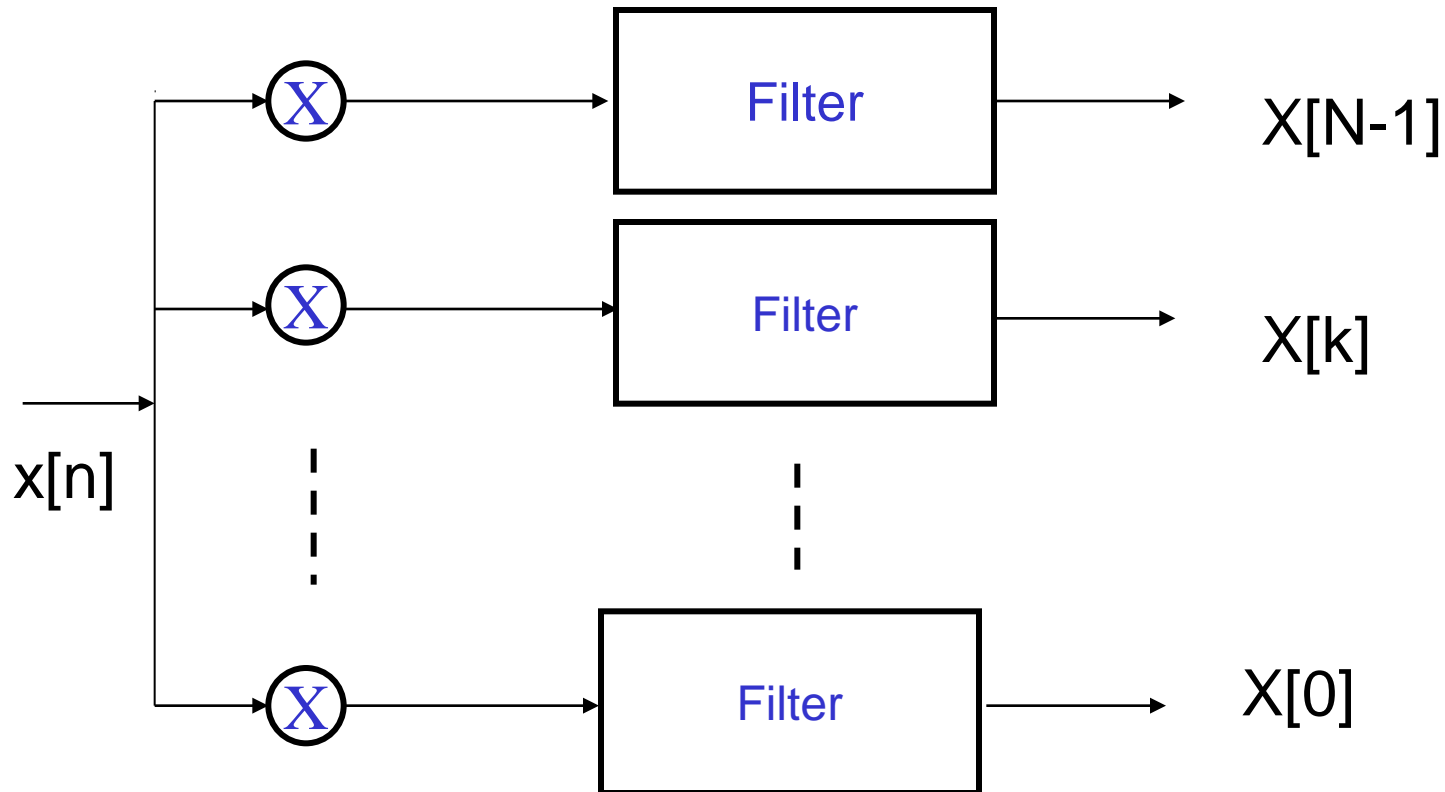
# 2 Spektralkomponenten auf Raster



## 2 Spektralkomponenten beide nicht auf Raster $A1/A2 = 0.1$



# DFT als Filterbank



# Matrixdarstellung der DFT (1)

$$x[n] = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X[k] e^{j(2\pi k/N)n} \quad n = 0, 1, 2, \dots, N-1$$

$$X[k] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] e^{-j(2\pi n/N)k} \quad k = 0, 1, 2, \dots, N-1$$

führt man die Abkürzung  $W_N = e^{-j2\pi/N}$  ein, dann ergibt sich die gebräuchliche Schreibweise:

$$x[n] = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X[k] W_N^{-kn} \quad n = 0, 1, 2, \dots, N-1$$

$$X[k] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] W_N^{kn} \quad k = 0, 1, 2, \dots, N-1$$



$$X[k] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] W_N^{kn} \quad k = 0, 1, 2, \dots, N-1$$

$$X[0] = x[0] \cdot 1 + x[1] \cdot 1 + x[2] \cdot 1 + \dots x[N-1] \cdot 1$$

$$X[1] = x[0] \cdot 1 + x[1] \cdot W_N^1 + x[2] \cdot W_N^2 + \dots x[N-1] \cdot W_N^{N-1}$$

$$X[2] = x[0] \cdot 1 + x[1] \cdot W_N^2 + x[2] \cdot W_N^4 + \dots x[N-1] \cdot W_N^{2(N-1)}$$

⋮

$$X[N-1] = x[0] \cdot 1 + x[1] \cdot W_N^{N-1} + x[2] \cdot W_N^{N-1} + \dots x[N-1] \cdot W_N^{N-1}$$

---

$$W_N^0 = 1$$

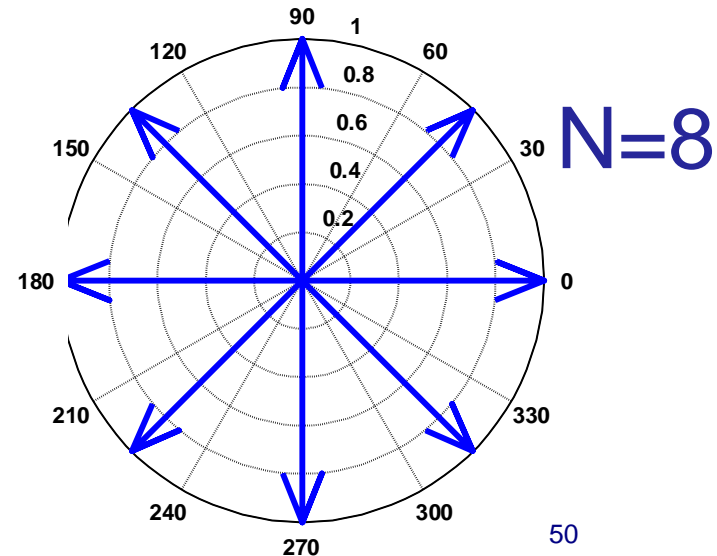
$$\mathbf{X} = \mathbf{W}_N \mathbf{x}$$

$$W_N = e^{-j2\pi/N}$$

$$\begin{bmatrix} X[0] \\ X[1] \\ X[2] \\ \vdots \\ X[N-1] \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & W_N^1 & W_N^2 & \dots & W_N^{N-1} \\ 1 & W_N^2 & W_N^4 & \dots & W_N^{2(N-1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & W_N^{N-1} & W_N^{2(N-1)} & \dots & W_N^{(N-1)(N-1)} \end{bmatrix}}_{\mathbf{W}_N} \cdot \begin{bmatrix} x[0] \\ x[1] \\ x[2] \\ \vdots \\ x[N-1] \end{bmatrix}$$

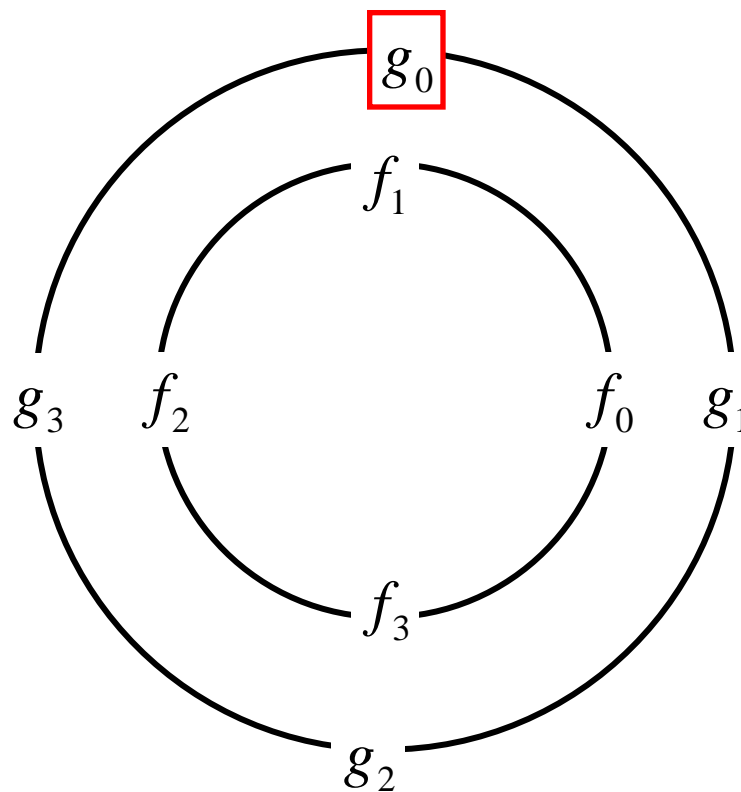
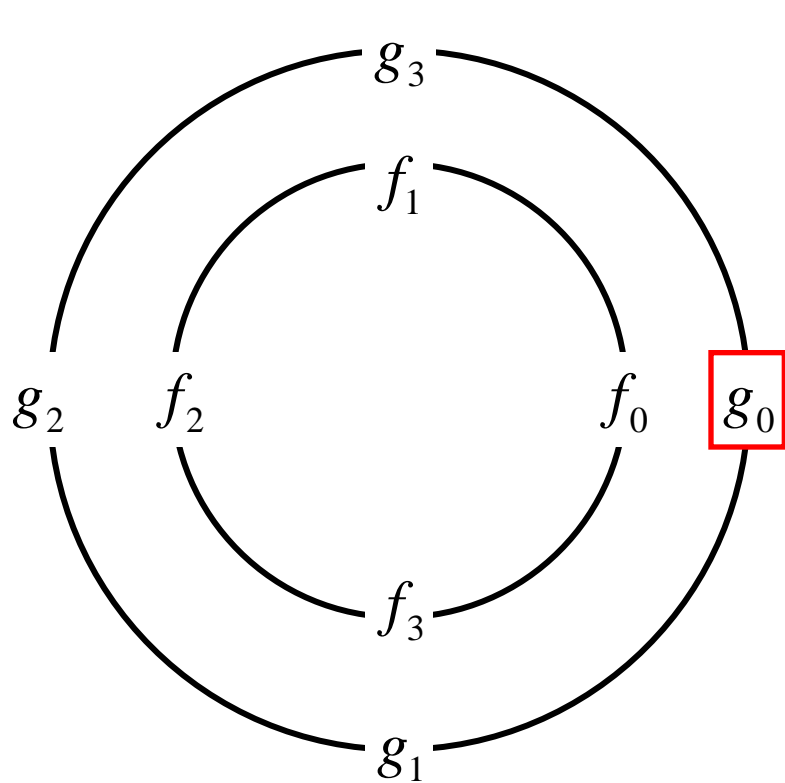
$$\mathbf{x} = \mathbf{W}_N^{-1} \mathbf{X}$$

$$\mathbf{W}_N^{-1} = \frac{1}{N} \mathbf{W}_N^*$$



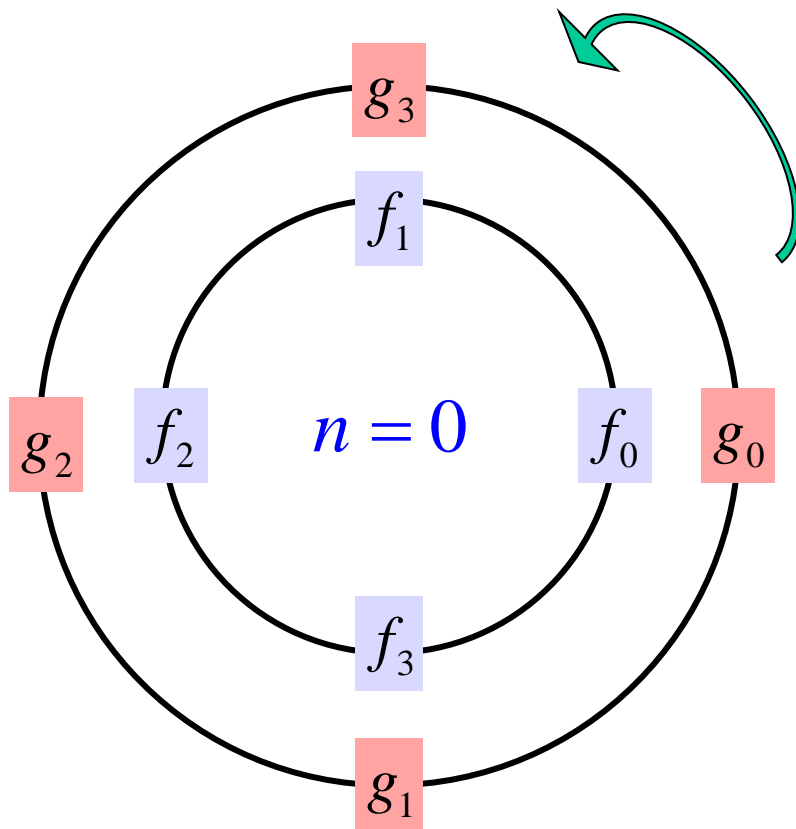
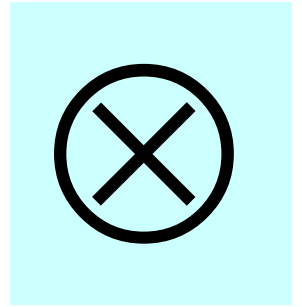
# Berechnung der Frequenzantwort mit Hilfe der Faltung

# Periodische (zirkuläre) Faltung



$f[n]; g[n]$

$$f[n] \otimes g[n] = f \otimes g[n] = \sum_{l=0}^{N-1} f[l]g[n-l] = \sum_{l=0}^{N-1} g[l]f[n-l]$$



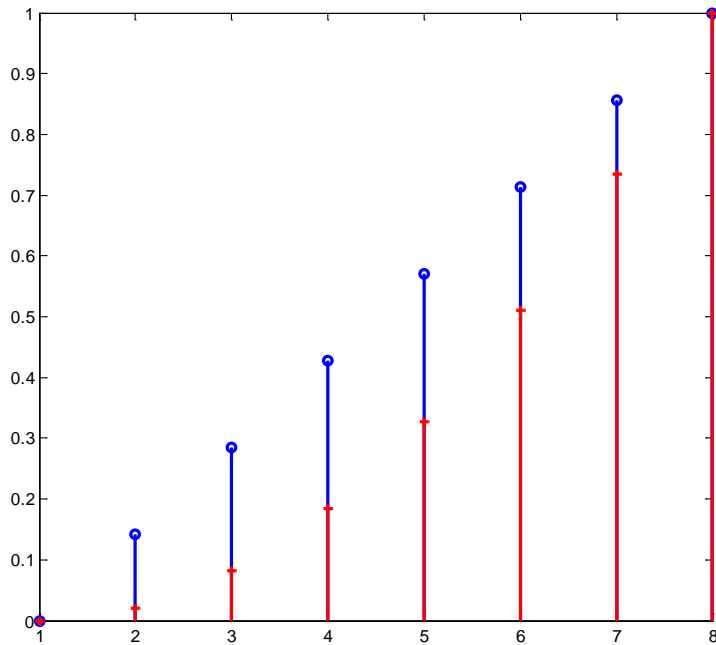
$$(f \otimes g)_0 = f_0g_0 + f_1g_3 + f_2g_2 + f_3g_1$$

$$(f \otimes g)_1 = f_0g_1 + f_1g_0 + f_2g_3 + f_3g_2$$

Die Faltung ist **periodisch** im Zeitbereich für die DFT (und Fourierreihe).

Die Faltung ist **aperiodisch** für die DTFT und Fouriertransformation.

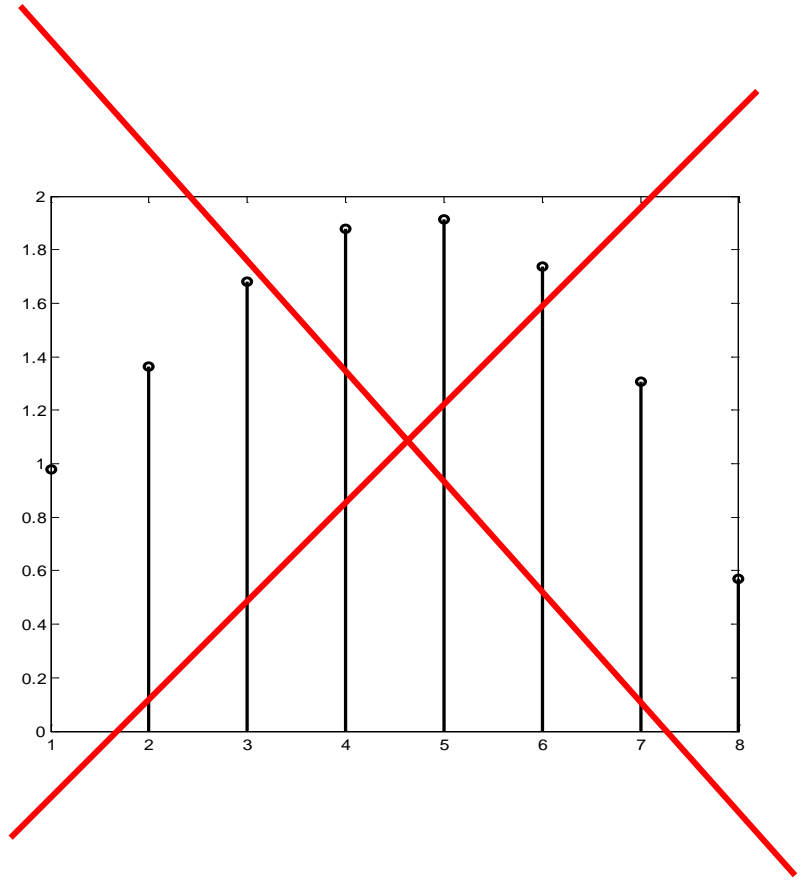
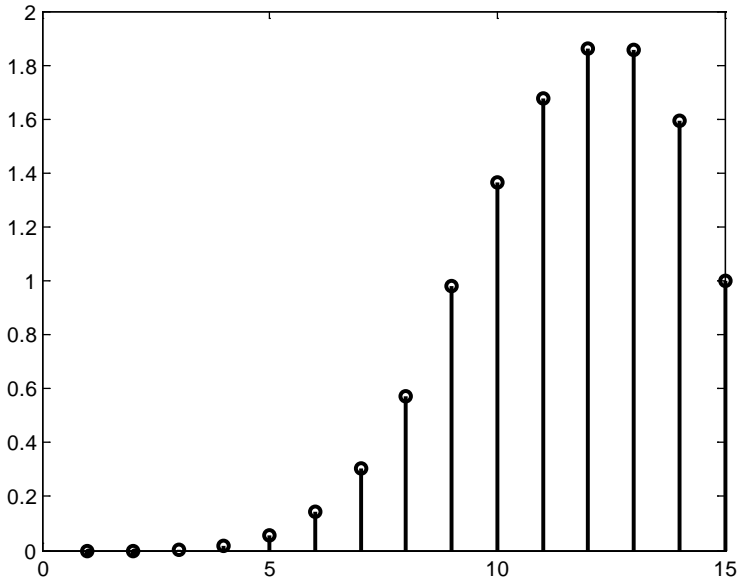
# Periodische $\Leftrightarrow$ aperiodische Faltung



$$\mathbf{f} = [0 \quad 0.02 \quad 0.08 \quad 0.18 \quad 0.32 \quad 0.51 \quad 0.73 \quad 1.00]$$
$$\mathbf{g} = [0 \quad 0.14 \quad 0.29 \quad 0.43 \quad 0.57 \quad 0.71 \quad 0.86 \quad 1.00]$$

$$f * g$$

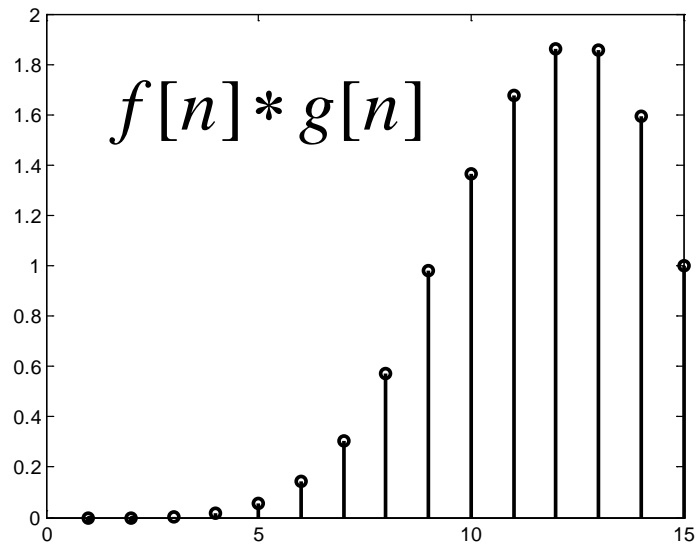
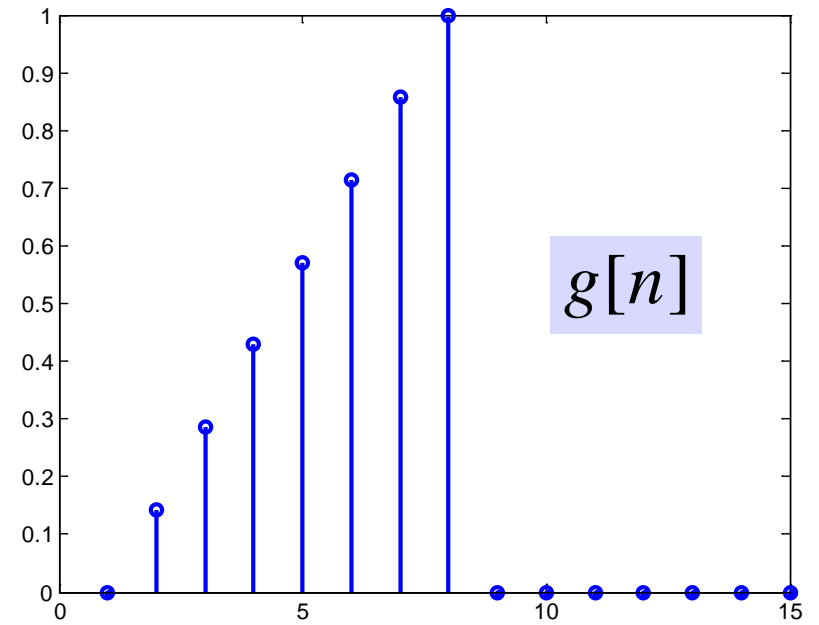
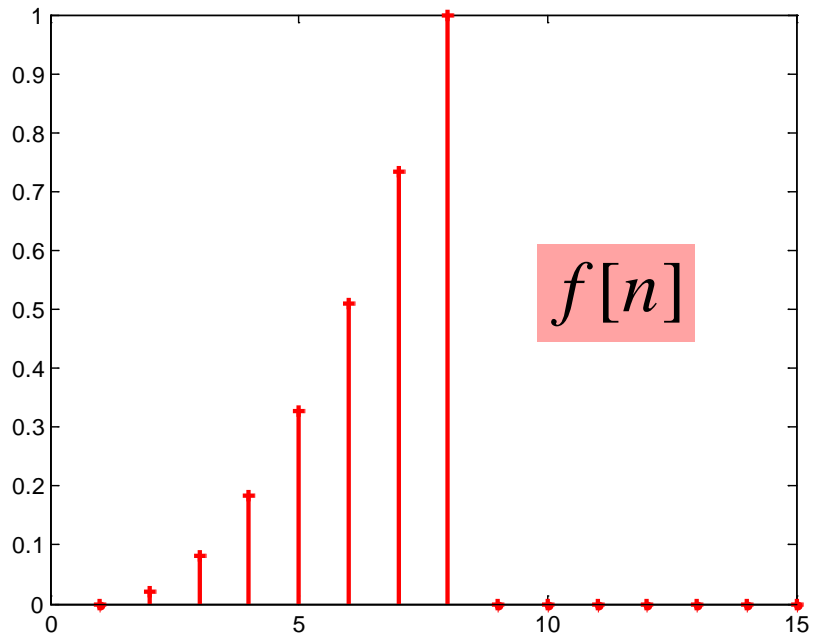
$$f \otimes g$$





# Verwendung der DFT für die »aperiodische« Faltung

```
F = fft([f zeros(1,length(g)-1)])  
G = fft([g zeros(1,length(f)-1)])  
conv(f,g) = ifft(F.*G)
```



$$f \otimes g \Leftrightarrow f * g$$

# Lineare Faltung mit DFT

1. Anfügen von  $N_g - 1$  Nullen an  $f$
2. Anfügen von  $N_f - 1$  Nullen an  $g$
3. Berechnen von  $F$  und  $G$  mittels DFT
4. Multiplizieren von  $F$  und  $G$
5. Inverse DFT von  $F \times G$  liefert  $f * g$

# Schnelle (FFT) Faltung

- Die Durchführung der Faltung im Frequenzbereich ist bei langen Signalen schneller als die Faltung im Zeitbereich, da die FFT ein sehr schneller Algorithmus ist.
- Die Zahl der Operationen ist bei der FFT von  $\sim N^2$  auf  $N \log(n)$  reduziert.

- Die Geschwindigkeit der Berechnung ist auch ein indirektes Maß für die Genauigkeit, da Rundungsfehler von der Zahl der Operationen abhängen:

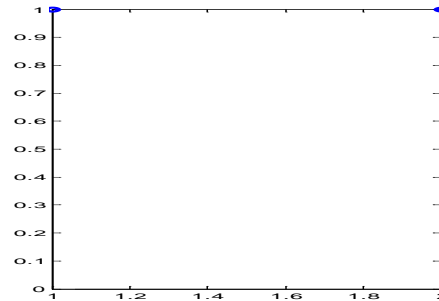
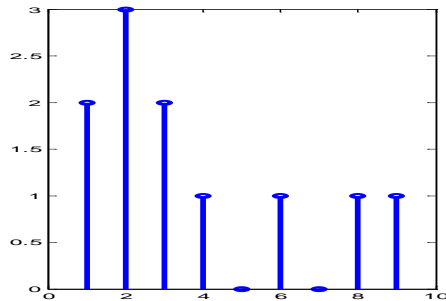
weniger Operationen → weniger Rundungsfehler

# Overlap-Add-Verfahren

- Bei der schnellen Faltung wird die FFT eingesetzt, die intern mit der periodischen Faltung arbeitet.
- Es muss verhindert werden, dass Fehler durch die periodische Faltung entstehen.

$$s[n] = [2 \ 3 \ 2 \ 1 \ 0 \ 1 \ 0 \ 1 \ 1]$$

$$h[n] = [1 \ 1]$$



Zerlegen des Signals in Blöcke der Länge L (L=3)

$$s[n] = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 2 \\ & 1 & 0 & 1 \\ & & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Länge der Signalabschnitte L (L = 3)

Anhängen von M – 1 Nullen pro Segment

$$s[n] = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 2 & 0 \\ & 1 & 0 & 1 & 0 \\ & & 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

---

Länge des Filter M (M = 2)

Anhängen von L – 1 Nullen

$$h[n] = [1 \ 1 \ 0 \ 0]$$



Faltung über Frequenzbereich:  
→ DFT, Multiplikation, → IDFT  
Ergebnisse zusammengesetzt

[2 5 5 2

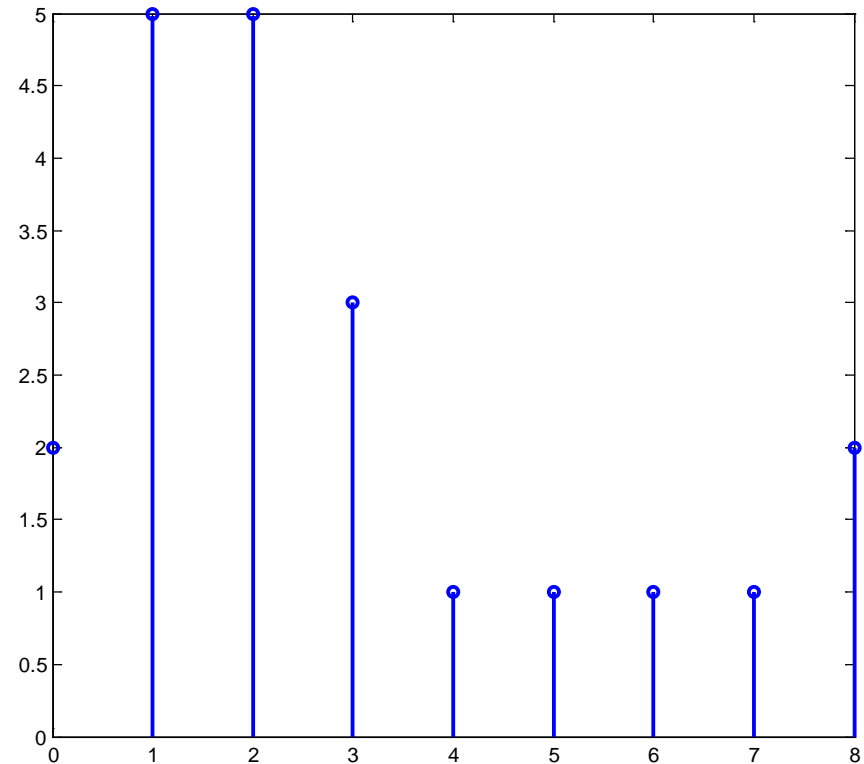
1 1 1 1

0 1 2 1 ...

-----

[2 5 5 3 1 1 1 1 2 ...

```
f=[2 3 2 1 0 1 0 1 1];  
h=[1 1];  
L=length(f)+length(h)-1;  
k=0:L-1;  
y=fftfilt(h, f, 3)  
stem(k, y);
```



# FFT Transformationen

- Basierend auf Basis 2, 4 oder mixed
- Decimation In Time und Decimation In Frequency
- Reelle und komplexe Algorithmen
- **Grundprinzip:**  
Aufteilung von N-Punkt  $\rightarrow$  N/2-Punkt  
 $\rightarrow$  N/4  $\rightarrow$  ...  $\rightarrow$  2-Punkt und  
Ausnützung der Symmetrie- und  
periodischen Eigenschaften von **W**

# DFT in Matrixenschreibweise

$$\mathbf{X} = \mathbf{W}_N \mathbf{x}$$

$$\mathbf{X} = \{X[0] \quad X[1] \quad \dots \quad X[n-1]\}^T$$

$$\mathbf{x} = \{x[0] \quad x[1] \quad \dots \quad x[n-1]\}^T$$

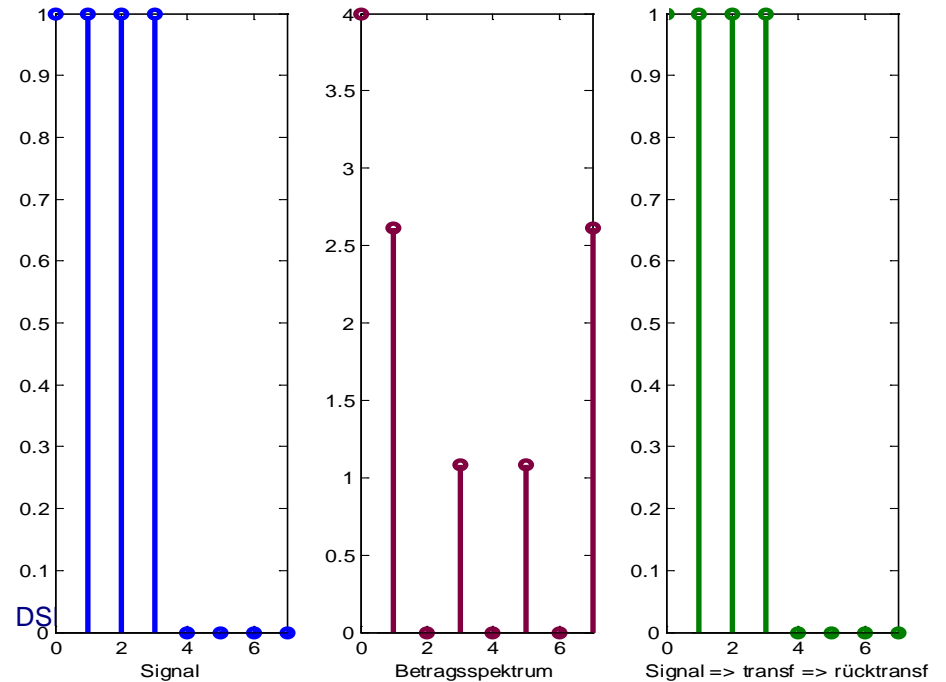
$$\mathbf{W}_N = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & W_N^1 & W_N^2 & \dots & W_N^{N-1} \\ 1 & W_N^2 & W_N^4 & \dots & W_N^{2(N-1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & W_N^{N-1} & W_N^{2(N-1)} & \dots & W_N^{(N-1)x(N-1)} \end{bmatrix}$$

$$W_N^0 = 1$$

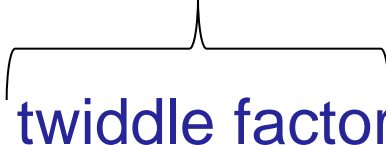
$$\mathbf{x} = \mathbf{W}_N^{-1} \mathbf{X} \rightarrow \begin{bmatrix} x[0] \\ x[1] \\ \vdots \\ x[N-1] \end{bmatrix} = \mathbf{W}_N^{-1} \begin{bmatrix} X[0] \\ X[1] \\ \vdots \\ X[N-1] \end{bmatrix} \quad \mathbf{W}_N^{-1} = \frac{1}{N} \mathbf{W}_N^*$$

# Matlabunterstützung für $W_N$

```
function DFTmatrixDarst
sig=[1 1 1 1 0 0 0 0];
N=length(sig);
SIG=sig*dftmtx(N);
sigrueck=(1/N)*(SIG*conj(dftmtx(N)));
figure
subplot(1, 2, 1)
stem(sig)
title 'Signal'
subplot(1, 2, 2)
stem(abs(sigrueck))
title 'Signal transf & rücktransf'
```



# Eigenschaften von $W_N$ (2)

  
twiddle factor

$W_N^k$  wiederholt sich nach Vielfachen von  $N$

$$W_8^0 = W_8^8 = W_8^{16} = \dots \implies W_N^k = W_N^{k+iN} \quad i = 0, 1, \dots, N-1$$

Die Zeiger von  $W_N^k$  unterscheiden sich nur in der Phase.

Zeiger in Gegenphase haben unterschiedliches Vorzeichen

$$W_N^k = -W_N^{k+\frac{N}{2}}$$

$$W_N^k = -W_N^{k+\frac{N}{2}} \quad W_8^3 = -W_8^{3+4=7}$$

$$W_8^6 = -W_8^2 = j$$

$$W_8^5 = -W_8^1$$

$$W_8^7 = -W_8^3$$

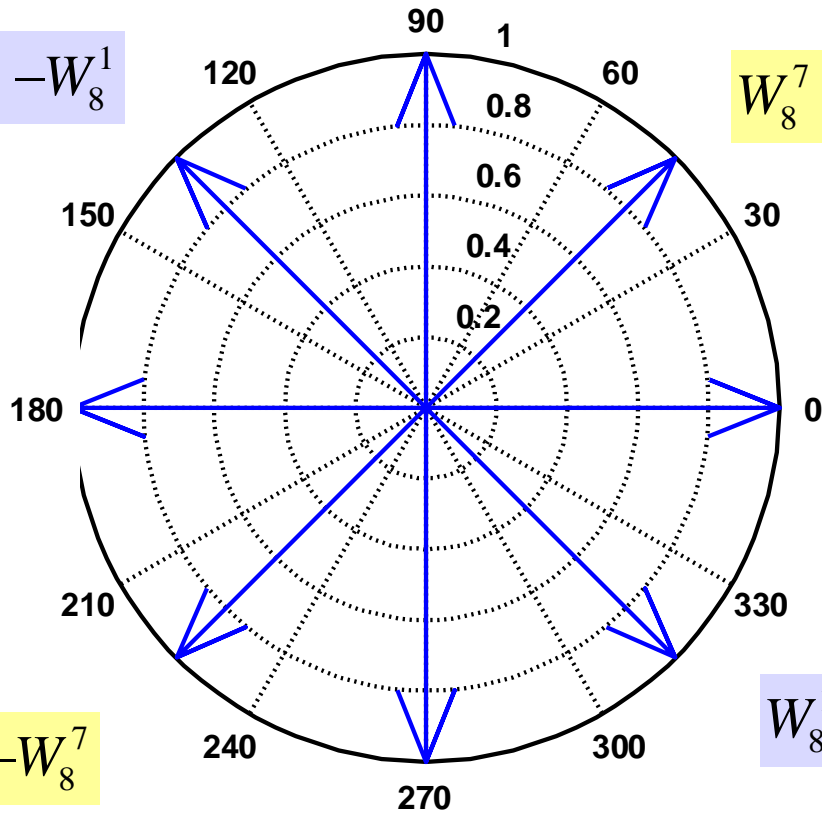
$$W_8^4 = -W_8^0 = -1$$

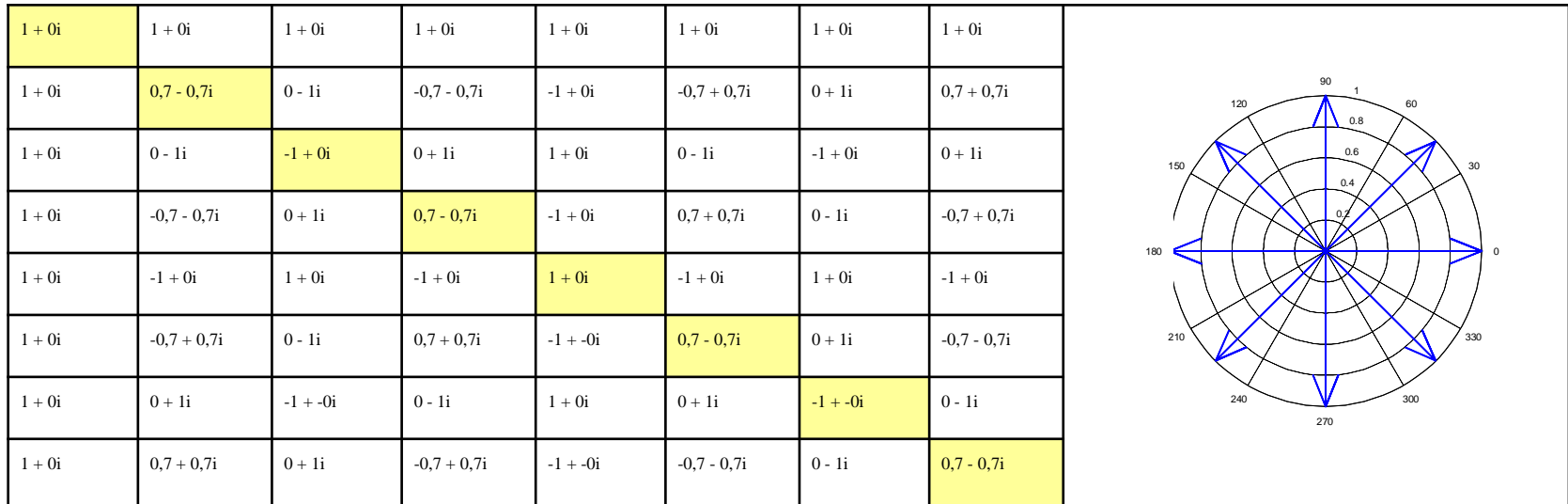
$$W_8^0 = 1$$

$$W_8^3 = -W_8^7$$

$$W_8^1 = -W_8^5$$

$$W_8^2 = -W_8^6 = -j$$





DFTMTX(8)

COMPASS (DFTMTX(8))



# FFT auf 2er-Basis

- Eine  $N$ -Punkt-Folge wird aufgeteilt in zwei  $N/2$ -Punkt-Folgen, damit wird die Zahl der Operationen von  $\sim N^2$  auf  $2 \times (N/2)^2 = N^2/2$  reduziert.
- Dieser Prozess wird fortgesetzt bis eine 2-Punkt-Folge übrig bleibt, die Anzahl der Operationen reduziert sich von  $\sim N^2 \rightarrow \sim N \log_2 N$

# Decimation in Time

Aufteilen von  $x[n]$ ,  $n = 0, 1, \dots, N - 1$

In Folge mit geraden und ungeraden Indizes

$$x_g = x[2m] \quad ; \quad x_u = x[2m + 1] \quad m = 0, 1, \dots, \frac{N}{2} - 1$$

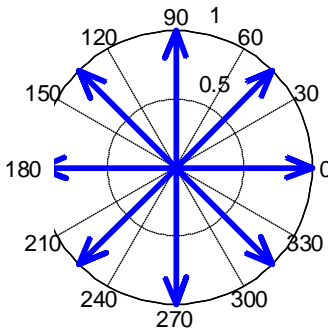
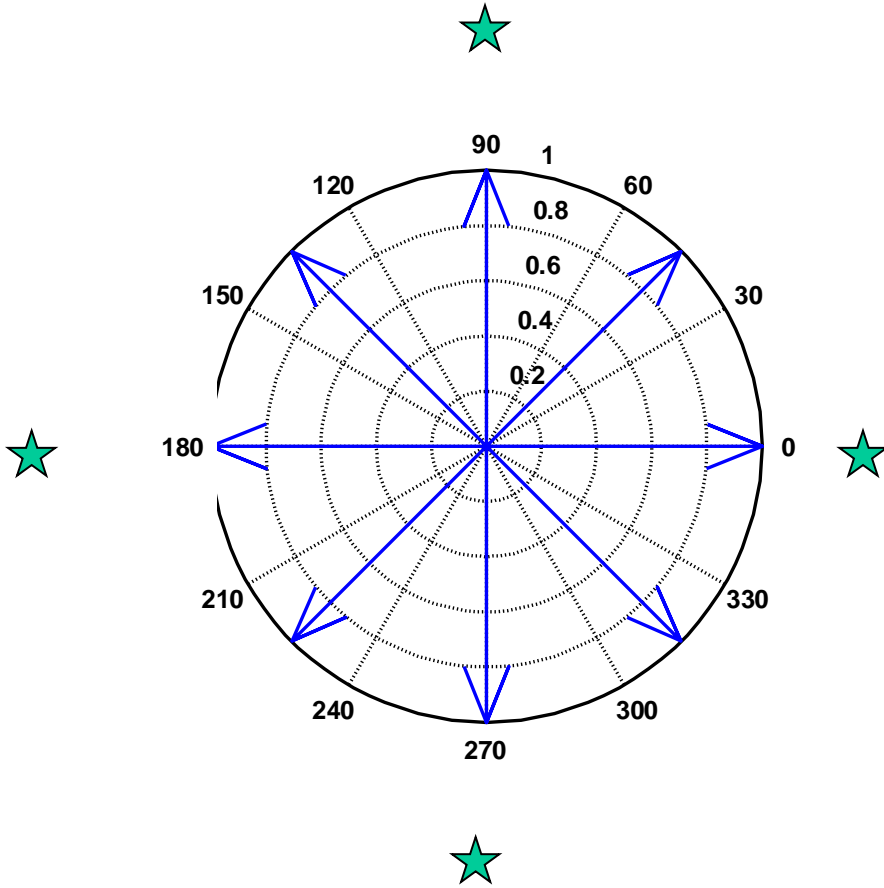
$$X[k] = \sum_{m=0}^{N-1} x[n] W_N^{kn} = \sum_{m=0}^{\frac{N}{2}-1} x[2m] W_N^{2km} + \sum_{m=0}^{\frac{N}{2}-1} x[2m + 1] W_N^{[2m+1]k}$$

$$X[k] = \sum_{m=0}^{N-1} x[n] W_N^{kn} = \sum_{m=0}^{\frac{N-1}{2}} x[2m] W_N^{2km} + \sum_{m=0}^{\frac{N-1}{2}} x[2m+1] W_N^{[2m+1]k}$$

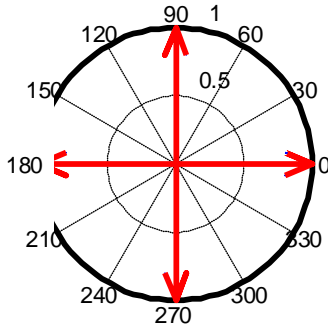
herausheben und vor der zweiten Summenterm stellen

$$X[k] = \sum_{m=0}^{N-1} x[n] W_N^{kn} = \sum_{m=0}^{\frac{N-1}{2}} \underbrace{x[2m]}_{x_g[m]} W_N^{2km} + W_N^{k} \sum_{m=0}^{\frac{N-1}{2}} \underbrace{x[2m+1]}_{x_u[m]} W_N^{2km}$$

$$W_N^{2km} = W_{\frac{N}{2}}^{mk}$$



N = 8



N/2 = 4

$$X[k] = \sum_{m=0}^{\frac{N}{2}-1} \underbrace{x[2m]}_{x_g[m]} W_N^{2km} + W_N^k \sum_{m=0}^{\frac{N}{2}-1} \underbrace{x[2m+1]}_{x_u[m]} W_N^{2km} \quad W_N^{2km} = W_{\frac{N}{2}}^{km}$$

$$X[k] = \sum_{m=0}^{\frac{N}{2}-1} x[2m] W_{\frac{N}{2}}^{km} + W_N^k \sum_{m=0}^{\frac{N}{2}-1} x[2m+1] W_{\frac{N}{2}}^{km}, \quad k = 0, 1, \dots, N-1$$

Die Teilsummen obiger Gleichung stellen jeweils eine DFT der Länge  $N/2$  dar und wir können schreiben

$$\begin{aligned} X[k] &= \mathbf{DFT}_{\frac{N}{2}} \left\{ x_g[m] \right\} + W_N^k \cdot \mathbf{DFT}_{\frac{N}{2}} \left\{ x_u[m] \right\} \\ &= X_g[m] + W_N^k \cdot X_u[m] \end{aligned}$$

und erhalten  $X_g \dots \frac{N}{2}$  – DFT von  $x_g[n]$

$X_u \dots \frac{N}{2}$  – DFT von  $x_u[n]$

Wir wollen aber das Spektrum für alle  $k$  berechnen.

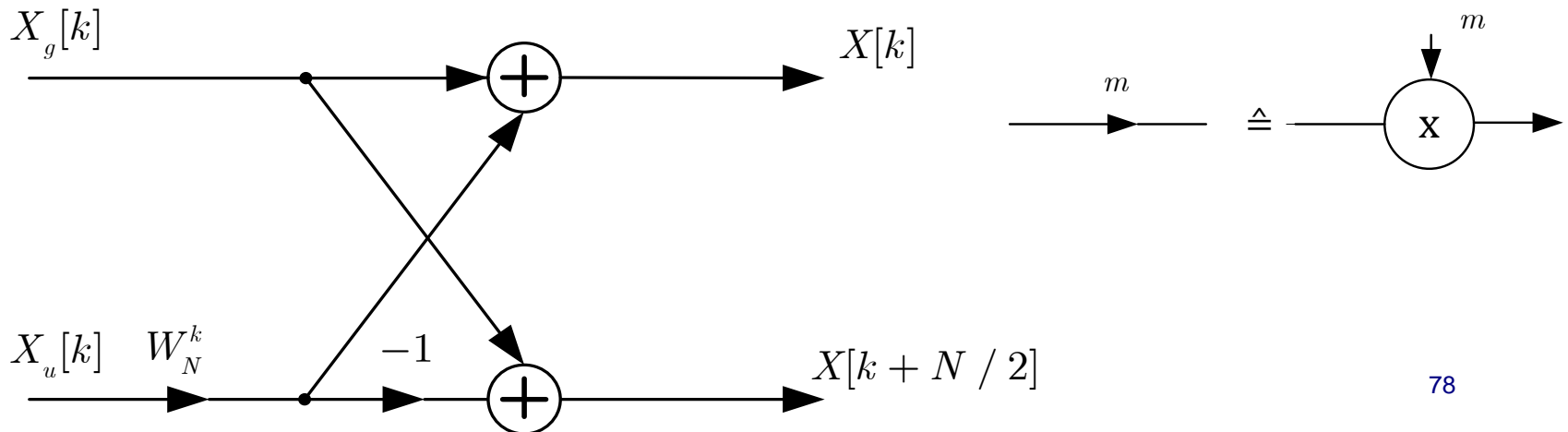
Die Spektren  $X_g[m]; X_u[m]$  sind periodisch in  $N/2$  und wir können daher einfach periodisch fortsetzen:

Wir wissen bereits, dass  $W_N^k = -W_N^{k+\frac{N}{2}}$  und erhalten schließlich

$$X[k] = X_g[k] + W_N^k X_u[k], \quad k = 0, 1, \dots, \frac{N}{2} - 1$$

$$X[k + \frac{N}{2}] = X_g[k] - W_N^k X_u[k], \quad k = \frac{N}{2}, \dots, N-1$$

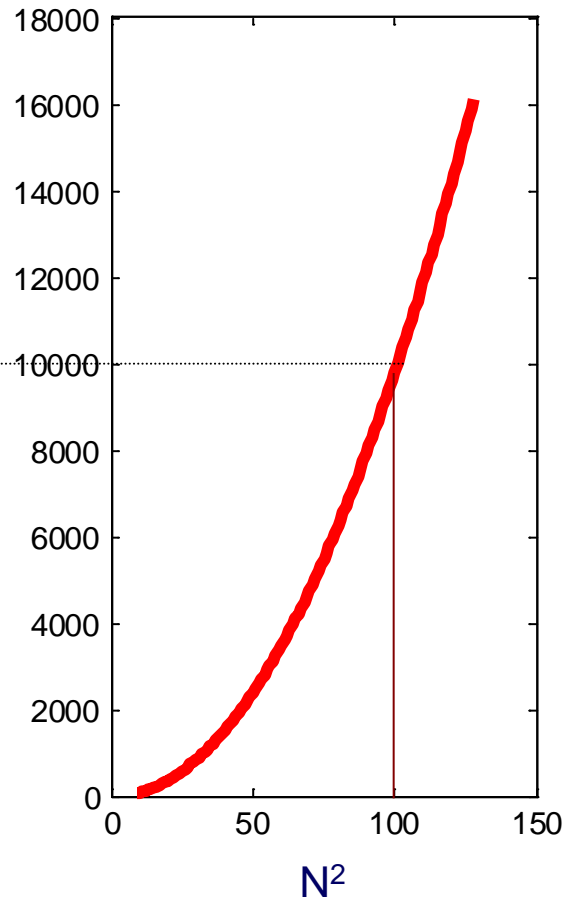
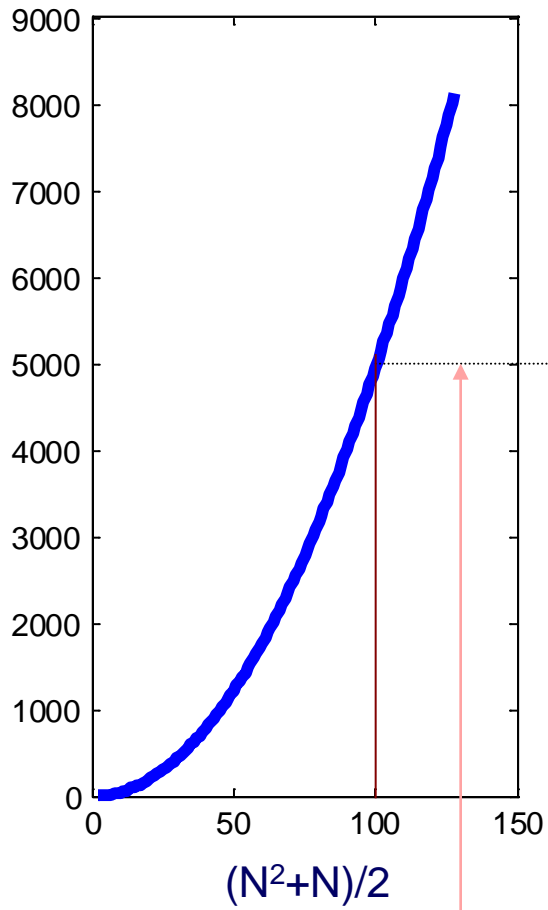
Signalflussgraph (Butterfly) wir können schreiben



# Anzahl Multiply-Add Operationen

- Die Berechnung von  $X_g[k]$  und  $X_u[k]$  verlangt  $2 \times \left(\frac{N}{2}\right)^2$  Operationen, die Berechnung von  $W_N^k X_0[k]$  verlangt zusätzliche  $N/2$  Operationen.

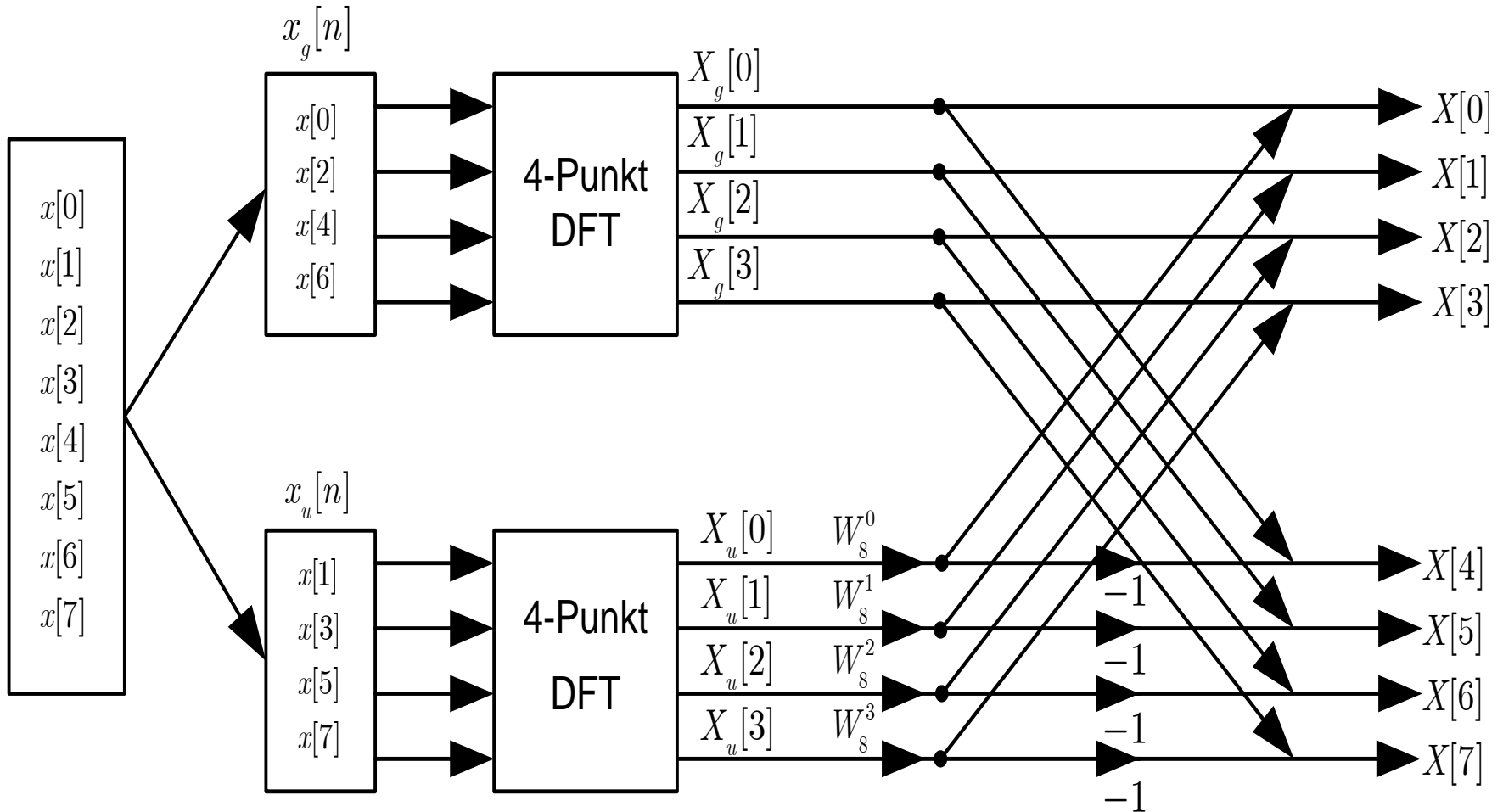
Das ergibt  $(N^2 + N)/2 \Leftrightarrow N^2$  Operationen.



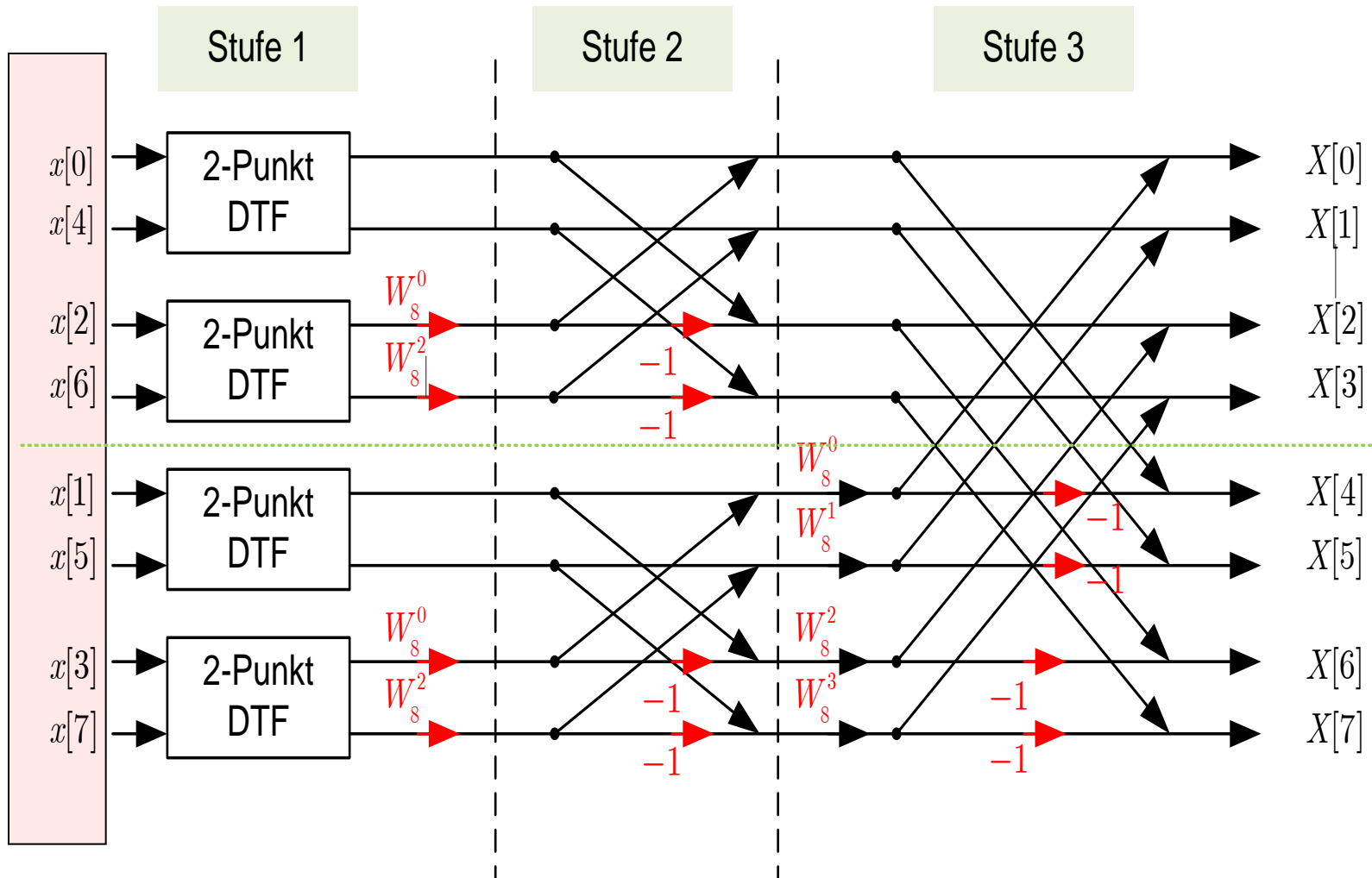
Bei großem N nur 50 % der Operationen



# Signalflussgraph FFT



# 8-Punkt DIT



# Bit-reversal addressing

Ind. Dez.	binär	Bit-reversed	Dez. bit-rev.
0	000	000	0
1	001	100	4
2	010	010	2
3	011	110	6
4	100	001	1
5	101	101	5
6	110	011	3
7	111	111	7

Unterstützt von DSP-Architektur

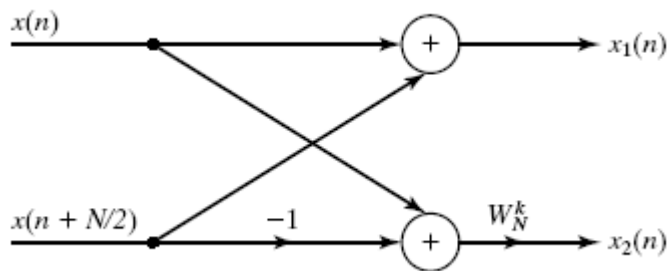
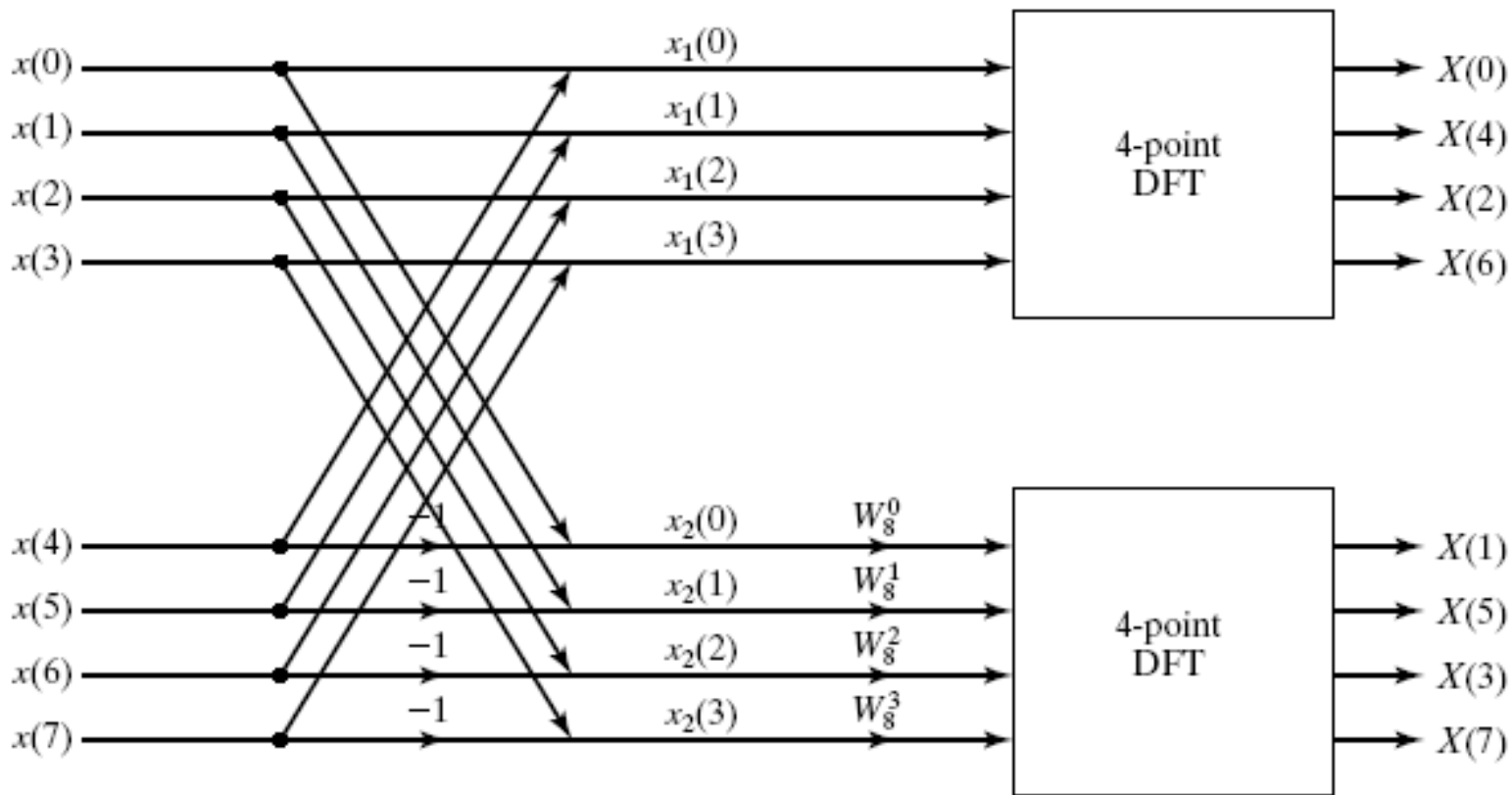
Decimation in Frequency ist aufgebaut wie DIT, aber die Butterfly-Operation wird im Zeitbereich eingesetzt

$$\begin{aligned}
 X[k] &= \sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1} x[n] W_N^{kn} + \sum_{n=\frac{N}{2}}^{N-1} x[n] W_N^{nk} \\
 &= \sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1} x[n] W_N^{kn} + \sum_{n=\frac{N}{2}}^{N-1} x[n + \frac{N}{2}] W_N^{nk} W_N^{\frac{N}{2}k}, \quad W_N^{\frac{N}{2}k} = (-1)^k
 \end{aligned}$$

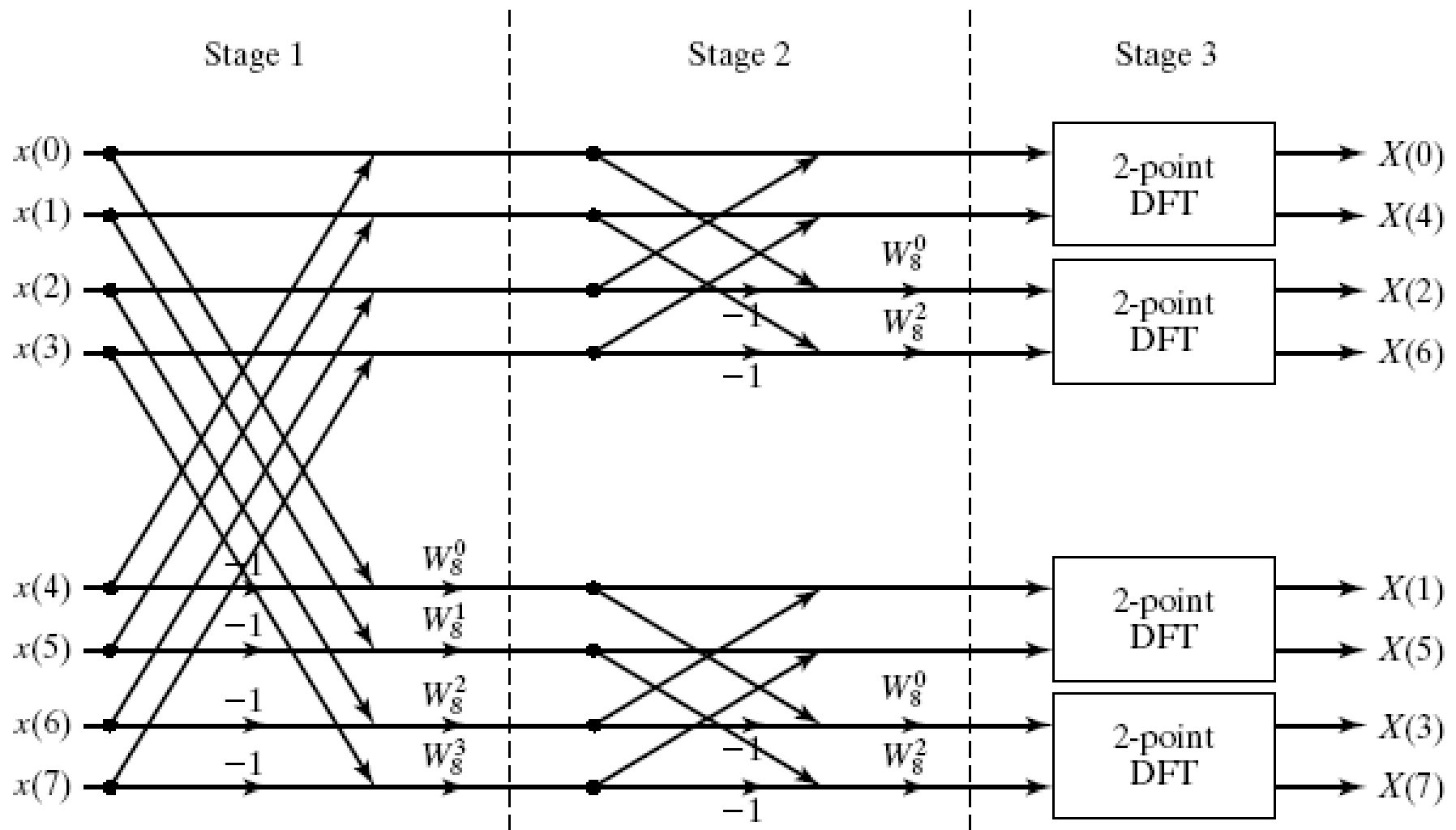
$$X[k] = \sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1} \left\{ x[n] + (-1)^k x[n + \frac{N}{2}] \right\} W_N^{nk}$$

$$X[2k] = \sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1} \left\{ x[n] + x[n + \frac{N}{2}] \right\} W_N^{nk} = \sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1} x_1[n] W_N^{nk}$$

$$X[2k + 1] = \sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1} \left\{ x[n] - x[n + \frac{N}{2}] \right\} W_N^{nk} = \sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1} x_2[n] W_N^{nk}$$



**DIF**



**Figure 8.7** Final decomposition of an 8-point DIF FFT

# Zero padding

- Berechnung der Faltung über den Frequenzbereich
- Erzeugen von Signallängen, die Potenz von 2 sind, um FFT anwenden zu können
- Bessere Darstellung (Interpolation) im Frequenzbereich.